ମାଧ୍ୟମିକ ବୀଜଗଣିତ

ନବମ ଶ୍ରେଣୀ

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ମାଧ୍ୟମିକ ବୀଜଗଣିତ

ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ନିମନ୍ତେ

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଅନୁମୋଦିତ ଓ ପ୍ରକାଶିତ

© ସର୍ବସ୍ୱତ୍ୱ ସଂରକ୍ଷିତ

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ :

ପ୍ରଫେସର ଡକ୍ଟର ବିଷ୍ଣୁ ପ୍ରସନ୍ନ ଆଚାର୍ଯ୍ୟ (ସମୀକ୍ଷକ)
ଡକ୍ଟର ମୁରଲୀଧର ସାମଲ
ଡକ୍ଟର ହାଡ଼ିବନ୍ଧୁ ପଟ୍ଟନାୟକ
ଶ୍ରୀ ବ୍ୟାସଦେବ ପାଣି
ଶ୍ରୀ ରଘୁନାଥ ମହାପାତ୍ର
ଶ୍ରୀମତୀ କବିତା ସେନାପତି
ଡକ୍ଟର ନଳିନୀକାନ୍ତ ମିଶ୍ର
ଶ୍ରୀ ନାରାୟଣ ସାହୁ (ସଂଯୋଜକ)

ପ୍ରଥମ ପ୍ରକାଶକ : ୨୦୧୨
୨୦୧୯

ଆର୍ଟପୁଲ୍ : **ଗ୍ରାଫ୍ ଏନ୍ ଗ୍ରାଫିକ୍ସ,** ଓଡ଼ିଆ ବଜାର, କଟକ

ମୁଦ୍ରଣ :

ମୂଲ୍ୟ :

ପ୍ରସ୍ତାବନା

ଆଜିର ବିଜ୍ଞାନ-ଯୁଗରେ ଗଣିତହିଁ ମଣିଷର ଜୀବନଧାରାକୁ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ରୂପେ ନିୟନ୍ତ୍ରଣ କରୁଛି, ଏକଥା କହିଲେ ଅତ୍ୟୁକ୍ତି ହେବ ନାହିଁ । ଅଧିକରୁ ଅଧିକ ବିଶ୍ଳେଷଣ ଓ ଗବେଷଣାଜନିତ ଜ୍ଞାନ ଗଣିତକୁ ନୂଆ ମୋଡ଼ ଦେବାରେ ଲାଗିଛି । ଏହି ପରିପ୍ରେକ୍ଷୀରେ ମାଧ୍ୟମିକ ସ୍ତରରେ ମଧ୍ୟ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାଦାନର ବିଷୟବସ୍ତୁ ତଥା ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ ଆସିବା ସ୍ୱାଭାବିକ ।

ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT) ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ଏବଂ State Curriculum Framework-2007 କୁ ନେଇ ପ୍ରସ୍ତୁତ Syllabusକୁ ଭିତ୍ତି କରି ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଗଣିତ ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା(Syllabus)ର ସମୟୋପଯୋଗୀ ନବୀକରଣ କରିଛନ୍ତି । ଏହି ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଅନୁଯାୟୀ ନୂତନ ଭାବରେ **ମାଧ୍ୟମିକ ବୀଜଗଣିତ** ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି ।

ଗଣିତ ପ୍ରତି ଆଗ୍ରହ ସୃଷ୍ଟି ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାର ଏକ ମୁଖ୍ୟ ଲକ୍ଷ୍ୟ ଓ ଏହି ଲକ୍ଷ୍ୟ ପୂରଣ ନିମିତ୍ତ ପୁସ୍ତକଟିର ଭାଷା, ଉପସ୍ଥାପନା ଶୈଳୀ ତଥା ଚିତ୍ରଗୁଡ଼ିକୁ ସୁସଂଗଠିତ କରାଯାଇଛି । ପୁସ୍ତକ ରଚନା ସମୟରେ ପାଠ୍ୟକ୍ରମର ଲକ୍ଷ୍ୟ ସହ ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀଙ୍କର ବୟସ ଓ ବୌଦ୍ଧିକ ବିକାଶକୁ ଯଥାସମ୍ଭବ ଧ୍ୟାନ ଦିଆଯିବାର ଚେଷ୍ଟା କରାଯାଇଛି । ଅଭ୍ୟାସ ନିମିତ୍ତ ଅଧିକ ସୁଯୋଗ ସୃଷ୍ଟି କରିବା ଲାଗି ବହୁସଂଖ୍ୟକ ଉଦାହରଣ ଦିଆଯିବା ସଂଗେ ସଂଗେ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟକ ଚିନ୍ତାମୂଳକ ପ୍ରଶ୍ନ ସନ୍ନିବେଶିତ କରାଯାଇଛି ।

ପୁସ୍ତକଟିକୁ ତ୍ରୁଟିଶୂନ୍ୟ କରିବାର ସମସ୍ତ ଉଦ୍ୟମ କରାଯାଇଥିବା ସତ୍ତ୍ୱେ, ଯଦି ଏଥିରେ କୌଣସି ମୁଦ୍ରଣଜନିତ, ଭାଷାଗତ ବା ତଥ୍ୟଗତ ତ୍ରୁଟି ପରିଲକ୍ଷିତ ହୁଏ, ସେଥିପ୍ରତି କର୍ତ୍ତୃପକ୍ଷଙ୍କ ଦୃଷ୍ଟି ଆକର୍ଷଣ କରାଗଲେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସଂସ୍କରଣରେ ତାହାର ସଂଶୋଧନ କରାଯିବ ।

ଆଶା କରୁ ପୁସ୍ତକଟି ଶିକ୍ଷକ ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଅଧ୍ୟାପନା କାର୍ଯ୍ୟରେ ସହାୟକ ହେବ ।

ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ

ମୁଖବନ୍ଧ

ଆଜିର ଯୁଗ ହେଉଛି ବିଜ୍ଞାନ ଓ ପ୍ରଯୁକ୍ତି ବିଦ୍ୟାର ଯୁଗ । ତାତ୍ତ୍ୱିକ ଓ ପ୍ରୟୋଗାତ୍ମକ - ଏ ଉଭୟ ଦିଗରେ ବିଜ୍ଞାନର ଅଗ୍ରଗତି ନିମନ୍ତେ ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ଏକ ବଳିଷ୍ଠ ଭୂମିକା ରହିଛି । ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରର ବୀଜଗଣିତ ହେଉଛି ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଅଙ୍ଗ । ବିଦ୍ୟାଳୟ ସ୍ତରରୁ ବୀଜଗଣିତ ପାଠ୍ୟକ୍ରମ ଏକ ଉପଯୁକ୍ତ ଭିତ୍ତିଭୂମି ଉପରେ ପ୍ରତିଷ୍ଠିତ ହେବା ବାଞ୍ଛନୀୟ ।

ସାରା ବିଶ୍ୱରେ ଅନ୍ୟାନ୍ୟ ବିକାଶଶୀଳ ଦେଶମାନଙ୍କ ଭଳି ଭାରତ ମଧ୍ୟ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉଲ୍ଲେଖନୀୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିଛି । ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷାସ୍ତର ପାଇଁ ଜାତୀୟ ସ୍ତରରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ National Curriculum Frame Work - 2005 ରେ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାକୁ ଅଧିକ ଗୁରୁତ୍ୱ ଦିଆଯାଇଛି । ତଦନୁଯାୟୀ ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷା ଗବେଷଣା ଓ ତାଲିମ ପରିଷଦ (NCERT), ପାଠ୍ୟଖସଡ଼ା ଓ ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରଣୟନ କରିଛନ୍ତି । ଜାତୀୟ ଶିକ୍ଷାସ୍ରୋତକୁ ଦୃଷ୍ଟି ଦେଇ ଓଡ଼ିଶା ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, State Curriculum Framework-2007 ଅନୁଯାୟୀ ନବମ ଶ୍ରେଣୀ ପାଇଁ ସିଲାବସ୍ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରି ତଦନୁଯାୟୀ ନୂତନ ଭାବରେ **ମାଧ୍ୟମିକ ବୀଜଗଣିତ** ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ପ୍ରକାଶ କରିଛନ୍ତି ।

ଅଭିଜ୍ଞ ଲେଖକମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପାଠ୍ୟପୁସ୍ତକ ରଚନା କରାଯାଇ ପୁସ୍ତକର ପାଣ୍ଡୁଲିପିକୁ ସିଲାବସ୍ କମିଟିରେ ପଠିତ ଓ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ଆଲୋଚନା ଲବ୍ଧ ପରାମର୍ଶକୁ ପାଥେୟ କରି ପାଣ୍ଡୁଲିପିଟି ସଂଶୋଧିତ ହୋଇଛି ।

ଏହି ପୁସ୍ତକ ପ୍ରସ୍ତୁତିରେ ଆନ୍ତରିକ ସହଯୋଗ କରିଥିବାରୁ ମୁଁ ଲେଖକମଣ୍ଡଳୀ, ସମୀକ୍ଷକ ଓ ସଂଯୋଜକଙ୍କୁ ଧନ୍ୟବାଦ ଜଣାଉଛି । ଆଶା କରୁଛି, ପୁସ୍ତକଟି ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀ ତଥା ଶିକ୍ଷକ-ଶିକ୍ଷୟିତ୍ରୀଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆଦୃତ ହେବ ।

ସଭାପତି

ମାଧ୍ୟମିକ ଶିକ୍ଷା ପରିଷଦ, ଓଡ଼ିଶା

ସୂଚୀ

ବିଷୟ		ପୃଷ୍ଠା
ପ୍ରଥମ ଅଧ୍ୟାୟ :	ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଏବଂ ସେଟ୍‌ର ପ୍ରୟୋଗ	1
ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ :	ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା	20
ତୃତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ :	ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଓ ଅଭେଦ	56
ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ :	ବୀଜଗାଣିତିକ ସମୀକରଣ	89
ପଞ୍ଚମ ଅଧ୍ୟାୟ :	ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି	100
ଷଷ୍ଠ ଅଧ୍ୟାୟ :	ଅନୁପାତ ଓ ସମାନୁପାତ	112
ସପ୍ତମ ଅଧ୍ୟାୟ :	ପରିସଂଖ୍ୟାନ	125
ଅଷ୍ଟମ ଅଧ୍ୟାୟ :	ସମ୍ଭାବ୍ୟତା	148
	ଉତ୍ତରମାଳା	157

ଭାରତର ସମ୍ବିଧାନ

ପ୍ରାକ୍ କଥନ :

ଆମେ ଭାରତବାସୀ ଭାରତକୁ ଏକ ସାର୍ବଭୌମ, ସମାଜବାଦୀ, ଧର୍ମ ନିରପେକ୍ଷ, ଗଣତାନ୍ତ୍ରିକ ସାଧାରଣତନ୍ତ୍ର ରୂପେ ଗଠନ କରିବା ପାଇଁ ଦୃଢ଼ ସଂକଳ୍ପ ନେଇ ଓ ଏହାର ସମସ୍ତ ନାଗରିକଙ୍କୁ

- ସାମାଜିକ, ଅର୍ଥନୈତିକ ଓ ରାଜନୈତିକ ନ୍ୟାୟ ;
- ଚିନ୍ତା, ଅଭିବ୍ୟକ୍ତି, ପ୍ରତ୍ୟୟ, ଧର୍ମୀୟ ବିଶ୍ୱାସ ଏବଂ ଉପାସନାର ସ୍ୱତନ୍ତ୍ରତା;
- ସ୍ଥିତି ଓ ସୁବିଧା ସୁଯୋଗର ସମାନତାର ସୁରକ୍ଷା ପ୍ରଦାନ କରିବାକୁ ତଥା
- ବ୍ୟକ୍ତି ମର୍ଯ୍ୟାଦା ଏବଂ ରାଷ୍ଟ୍ରର ଐକ୍ୟ ଓ ସଂହତି ନିଶ୍ଚିତ କରି ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ

ଭ୍ରାତୃଭାବ ଉତ୍ସାହିତ କରିବାକୁ

ଏହି ୧୯୪୯ ମସିହା ନଭେମ୍ବର ୨୬ ତାରିଖ ଦିନ

ଆମର ସଂବିଧାନ ପ୍ରଣୟନ ସଭାରେ ଏତଦ୍ଦ୍ୱାରା

ଏହି ସମ୍ବିଧାନକୁ ଗ୍ରହଣ ଓ ପ୍ରଣୟନ କରୁଅଛୁ ଏବଂ ଆମ ନିଜକୁ ଅର୍ପଣ କରୁଅଛୁ ।

ଚତୁର୍ଥ ଅଧ୍ୟାୟ (କ)

୫୧(କ) ଧାରା : ମୌଳିକ କର୍ତ୍ତବ୍ୟ

ଭାରତର ପ୍ରତ୍ୟେକ ନାଗରିକଙ୍କର କର୍ତ୍ତବ୍ୟ -

(କ) ସମ୍ବିଧାନକୁ ମାନି ଚଳିବା ଏବଂ ଏହାର ଆଦର୍ଶ ଓ ଅନୁଷ୍ଠାନମାନଙ୍କୁ ଏବଂ ଜାତୀୟ ପତାକା ଓ ଜାତୀୟ ସଙ୍ଗୀତକୁ ସମ୍ମାନ ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା;

(ଖ) ଯେଉଁସବୁ ମହନୀୟ ଆଦର୍ଶ ଆମ ଜାତୀୟ ସ୍ୱାଧୀନତା ସଂଗ୍ରାମକୁ ଅନୁପ୍ରାଣିତ କରିଥିଲା, ତାହାକୁ ସ୍ମରଣ ଓ ଅନୁସରଣ କରିବା;

(ଗ) ଭାରତର ସାର୍ବଭୌମତ୍ୱ, ଏକତା ଓ ସଂହତି ବଜାୟ ଏବଂ ସୁରକ୍ଷିତ ରଖିବା;

(ଘ) ଦେଶର ପ୍ରତିରକ୍ଷା କରିବା ଓ ଆବଶ୍ୟକ ସ୍ଥଳେ ଜାତୀୟ ସେବା ପ୍ରଦାନ କରିବା;

(ଙ) ଧର୍ମଗତ, ଭାଷାଗତ ଏବଂ ଆଞ୍ଚଳିକ କିମ୍ବା ଗୋଷ୍ଠୀଗତ ବିଭିନ୍ନତାକୁ ଅତିକ୍ରମ କରି ଭାରତର ଜନସାଧାରଣଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଐକ୍ୟ ଓ ଭ୍ରାତୃଭାବ ପ୍ରତିଷ୍ଠା କରିବା ଏବଂ ନାରୀଜାତିର ମର୍ଯ୍ୟାଦାହାନୀସୂଚକ ବ୍ୟବହାର ପରିତ୍ୟାଗ କରିବା;

(ଚ) ଆମର ସଂସ୍କୃତିର ମୂଲ୍ୟବାନ ଐତିହ୍ୟକୁ ସମ୍ମାନ ପ୍ରଦର୍ଶନ ଓ ସଂରକ୍ଷଣ କରିବା;

(ଛ) ଅରଣ୍ୟ, ହ୍ରଦ, ନଦୀ, ବନ୍ୟପ୍ରାଣୀ ସମେତ ପ୍ରାକୃତିକ ପରିବେଶର ସୁରକ୍ଷା ଓ ଉନ୍ନତି କରିବା ଏବଂ ଜୀବଜଗତ ପ୍ରତି ଅନୁକମ୍ପା ପ୍ରଦର୍ଶନ କରିବା;

(ଜ) ବୈଜ୍ଞାନିକ ମନୋଭାବ, ମାନବବାଦ ଏବଂ ଅନୁସନ୍ଧିତ୍ସା ଓ ସଂସ୍କାର ମନୋଭାବ ପୋଷଣ କରିବା;

(ଝ) ସର୍ବସାଧାରଣ ସମ୍ପତ୍ତିର ସୁରକ୍ଷା କରିବା ଓ ହିଂସା ପରିତ୍ୟାଗ କରିବା;

(ଞ) ବ୍ୟକ୍ତିଗତ ଓ ସମଷ୍ଟିଗତ କାର୍ଯ୍ୟାବଳୀର ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉତ୍କର୍ଷ ସାଧନ କରିବା, ଯାହା ଦ୍ୱାରା ଆମ ଦେଶ ପ୍ରଚେଷ୍ଟା ଓ କୃତିତ୍ୱର ଉଚ୍ଚତର ସୋପାନକୁ ଅବିରତ ଉନ୍ନତି କରିପାରିବ;

(ଟ) ମାତା ବା ପିତା ବା ଅଭିଭାବକ, ତାଙ୍କର ଛଅ ବର୍ଷରୁ ଚଉଦ ବର୍ଷ ବୟସ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସନ୍ତାନ ବା ପାଳିତଙ୍କୁ ଶିକ୍ଷାଲାଭର ସୁଯୋଗ ଯୋଗାଇ ଦେବା ।

ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଏବଂ ସେଟ୍‌ର ପ୍ରୟୋଗ
(SET OPERATIONS AND APPLICATION OF SET)

1.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction):

ବିଂଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଗଣିତଶାସ୍ତ୍ରରେ ଚମକ ସୃଷ୍ଟି କରିଥିବା ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱର ସ୍ରଷ୍ଟା ହେଉଛନ୍ତି ବିଖ୍ୟାତ ଜର୍ମାନ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଜର୍ଜ କ୍ୟାଣ୍ଟର (Georg Cantor, (1845 – 1918)**। ସୂର୍ଯ୍ୟ ବିହୁନେ ଗ୍ରହମାନେ ଯେପରି ନିଷ୍ପ୍ରଭ ଓ ନିସ୍ତେଜ ହୋଇଥାନ୍ତି, **ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ (Set Theory)** ବିନା ଗଣିତଶାସ୍ତ୍ରର ବିଭିନ୍ନ ବିଭାଗ ଯଥା: ଜ୍ୟାମିତି, ବୀଜଗଣିତ, କଳନ ଶାସ୍ତ୍ର (Calculus) ଇତ୍ୟାଦିର ଅବସ୍ଥା ଠିକ୍ ସେହିପରି ହୋଇଥାଏ। ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ଗଣିତକୁ ସହଜ ଓ ସୁନ୍ଦର କରିବାରେ, ଜଟିଳ ଗାଣିତିକ ତତ୍ତ୍ୱକୁ ସରଳ ଓ ସାବଲୀଳ ଭାବରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିବାରେ ମୁଖ୍ୟ ଭୂମିକା ଗ୍ରହଣ କରିପାରିଛି। ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ସେଟ୍ ଓ ଏହାର ଉପାଦାନ, ସେଟ୍‌ର ଲିଖନ ପଦ୍ଧତି, ସସୀମ ସେଟ୍ ଓ ଅସୀମ ସେଟ୍, ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍, ଉପସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ସୂଚନା ପାଇବା ସହ ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟା (ସଂଯୋଗ, ଛେଦ ଓ ଅନ୍ତର) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପାଠ କରିଛ । ଏଥିସହ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ସଂପର୍କ ତଥା ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକର ଧାରଣା ସ୍ପଷ୍ଟ କରିବା ପାଇଁ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର (Venn–diagram) ର ଆବଶ୍ୟକତା ମଧ୍ୟ ଉପଲବ୍ଧି କରିଛ । ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ସେହି ପ୍ରକ୍ରିୟା ତଥା ଅନ୍ୟ କିଛି ନୂତନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ।

1.2 ପୂର୍ବପାଠର ପର୍ଯ୍ୟାଲୋଚନା :

ସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ତୁମେମାନେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଥିବା ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ସମାନ୍ୟ ରୂପେ ପୁନଃ ଆଲୋଚନା ପ୍ରଥମେ କରିବା।

(i) ସେଟ୍ ଓ ଏହାର ଉପାଦାନ (Set and its elements) :

ସେଟ୍ ଓ ସେଟ୍ ର ଉପାଦାନ ଏ ଦୁଇଟିର ସଂଜ୍ଞା ନାହିଁ। ମାତ୍ର ଆମକୁ ଏକ ସେଟ୍ S ଓ ଏକ ବସ୍ତୁ (ଯାହାକୁ ଆମେ x ଲେଖି ସୂଚାଇବା) ଦିଆଗଲେ ଆମେ କହି ପାରିବା ଉଚିତ ଯେ, $x \in S$. ଅର୍ଥାତ୍ x, S ସେଟ୍‌ର ଏକ ଉପାଦନ କିମ୍ବା $x \notin S$ ଅର୍ଥାତ୍ x, ସେଟ୍ S ର ଉପାଦାନ ନୁହେଁ।

ସେଟ୍‌କୁ ପ୍ରକାଶ କରିବା ପାଇଁ ଦୁଇଟି ପ୍ରଣାଳୀ ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇଥାଏ। ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା– ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀ (Tabular or Roster Method) ଏବଂ ସୂତ୍ର (ସେଟ୍ ଗଠନକାରୀ) ପ୍ରଣାଳୀ (Set-builder method)।

ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ କୁଟୀଳବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରେ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖାଯାଏ। ଯେପରିକି

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6....\}$ ଇତ୍ୟାଦି।

ସୂତ୍ର ପଦ୍ଧତିରେ ଏହି ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌କୁ ଉପାଦାନମାନଙ୍କ ସାଧାରଣ ଧର୍ମକୁ ଭିତ୍ତିକରି ଲେଖାଯାଏ। ଯେପରିକି

$S = \{x$ I x, ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ $1 \leq x \leq 5\}$, $N = \{x$ I x, ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା$\}$

(ii) ସସୀମ ଓ ଅସୀମ ସେଟ୍ (Finite and Infinite sets):

ଯଦି କୌଣସି ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ଗୋଟି ଗୋଟି କରି ଗଣିଲେ ଗଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି ଘଟେ ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ଟି ଏକ **ସସୀମ ସେଟ୍** ଅଟେ। ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ଏହି ଗଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି ନ ଘଟୁଥିଲେ ଉକ୍ତ ସେଟ୍ ଟି ଏକ **ଅସୀମ ସେଟ୍** ଅଟେ ।

ଏକ ସସୀମ ସେଟ୍ A ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟାକୁ |A| ଦ୍ୱାରା କିମ୍ବା n(A) (Cardinality of A) ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଇଥାଏ ।

(iii) ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ (Empty or Null Set) : ଯଦି କୌଣସି ସେଟ୍ ଉପାଦାନ ବିହୀନ ତେବେ ସେହି ସେଟ୍‌କୁ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ। ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍‌କୁ ϕ ବା { } ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ ।

(iv) ଉପସେଟ୍ (Subset) : A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଯଦି A ସେଟ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଉପାଦନ B ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ A କୁ B ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍ କୁହାଯାଏ। ଏହାକୁ $A \subset B$ ବା $B \supset A$ ଭାବେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ । $A \subset B$ ଅର୍ଥ ହେଉଛି : $x \in A \Rightarrow x \in B$

ମନେରଖ : (a) $\phi \subset A$ (ଶୂନ୍ୟସେଟ୍ ଯେ କୌଣସି ସେଟ୍‌ର ଉପସେଟ୍)
(b) $A \subset A$ (ଯେ କୌଣସି ସେଟ୍ ତା' ନିଜର ଉପସେଟ୍)

(v) ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର ସମାନତା (Equality of two sets) : A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟରେ $A \subset B$ ଓ $B \subset A$ ହେଲେ, A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ସମାନ ଅର୍ଥାତ $A = B$

ମନେରଖ ଯେ, $\{1,2,3,4\}$ ଓ $\{4,2,1,3\}$ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ ଓ $\{1,1,2,3,4\}$ ଓ $\{1,2,3,4\}$ ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟ ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ। ଅର୍ଥାତ୍ ଉପାଦକଗୁଡ଼ିକର କ୍ରମରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କଲେ କିମ୍ବା ଏକ ଉପାଦାନକୁ ଅଧିକ ଥର ଲେଖିଲେ ନୂତନ ସେଟ୍ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ନାହିଁ ।

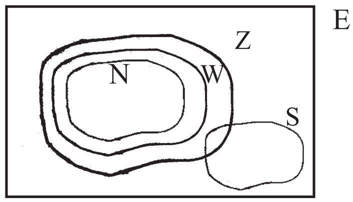
1.3 ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ (Universal set) :

ଆମେ କୌଣସି ଏକ ଆଲୋଚନା କଲାବେଳେ ବିଭିନ୍ନ ସେଟ୍ ଓ ବିଭିନ୍ନ ଉପାଦାନ ଇତ୍ୟାଦି ସହ ସଂସ୍ପର୍ଶରେ ଆସିଥାଉ। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ- ମନେକର ଆମର ଆଲୋଚନା ଗଣିତ ପୁସ୍ତକ ମାନଙ୍କୁ ନେଇ କରାଯାଉଛି। ଏଥିରେ ବୀଜଗଣିତ ଓ ପ୍ରୟୋଗ, ଜ୍ୟାମିତି ଓ ପ୍ରୟୋଗ, ସରଳ ଗଣିତ, ଗଣିତ ସୋପାନ, ତ୍ରିକୋଣମିତି ପରିଚୟ ଇତ୍ୟାଦି ଅଛି। ଓଡିଆ ଭାଷାରେ ଲିଖିତ ସମସ୍ତ ଗଣିତ ପୁସ୍ତକ ମାନଙ୍କ ସେଟ୍(S), ଇଂରାଜୀ ଭାଷାରେ ଲିଖିତ ସମସ୍ତ ଗଣିତ ପୁସ୍ତକ ମାନଙ୍କ ସେଟ୍ (T) ନିଆଯାଉ।

ଏହି ଆଲୋଚନାକୁ ଭିତ୍ତି କରି ଆମେ ଏକ ସେଟ୍ କଳ୍ପନା କରିବା ଓ ଏହାକୁ E ଲେଖି ସୂଚାଇବା ଯେପରିକି ଯେକୌଣସି ଗଣିତ ପୁସ୍ତକ, E ର ଏକ ଉପାଦାନ ହେବ । ଏଠାରେ ସରଳ ବୀଜଗଣିତ $\in$ E ଓ $S \subset E, T \subset E$ ଇତ୍ୟାଦି ହେବ । ଏପରି ସେଟ୍ E କୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ । ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E ର ସଂଜ୍ଞା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଆମର ଆଲୋଚନାର ପରିସର ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍ ଯଦି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସେଟ୍ 'E' ର ଉପସେଟ୍ କିମ୍ବା ଯେକୌଣସି ବସ୍ତୁ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସେଟ୍ E ର ଉପାଦାନ ହୁଏ ତେବେ, ସେହି ସେଟ୍‌କୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ (Universal Set) କୁହାଯାଏ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ ଯେ, ସାଧାରଣତଃ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E କୁ ଭେନ୍ ଚିତ୍ରରେ ଆୟତ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଓ ଏହାର ଉପସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ଆବଦ୍ଧ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଏ।



(ଚିତ୍ର 1.1)

ଉଦାହରଣ- 1 : ମନେକର N = ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ସେଟ୍

N* ବା W = ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍

Z = ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଓ $S = \{ \frac{1}{n} \mid n \in N\}, n \neq 1$

ଏଠାରେ ଆମେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ (Q) କୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E ଭାବରେ ନେଇ ପାରିବା । କାରଣ Q ର ଉପରୋକ୍ତ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି ।

1.4 ସେଟ୍ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Set Operations) :

ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B କୁ ନେଇ ତିନିଗୋଟି ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯଥା : **ସଂଯୋଗ (Union)**, **ଛେଦ (Intersection)** ଓ **ଅନ୍ତର (Difference)** ଘଟିଥାଏ। ଏମାନେ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ **ଦ୍ୱୈତ ପ୍ରକ୍ରିୟା (binary operation)** ।

ମନେରଖ : ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଏମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଯେଉଁ ବୀଜଗଣିତର ସୃଷ୍ଟି ତାହାକୁ ବୁଲିଆନ୍ ବୀଜଗଣିତ (Boolean Algebra) କୁହାଯାଏ । ପ୍ରଖ୍ୟାତ ଇଂରେଜ ଗଣିତଜ୍ଞ ଓ ତର୍କଶାସ୍ତ୍ରବିତ୍ George Boole (1815 -1866) ଙ୍କର ଏହି କ୍ଷେତ୍ରକୁ ବିଶେଷ ଅବଦାନ ଥିବାରୁ ଏହି ବୀଜଗଣିତ ତାଙ୍କ ନାମରେ ନାମିତ ।

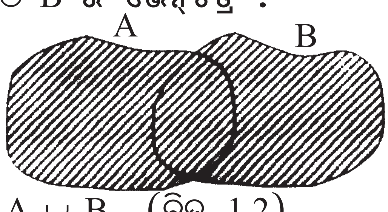
(i) ସଂଯୋଗ (Union) :

ସଂଜ୍ଞା : A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ର ସଂଯୋଗ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଏହା $A \cup B$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ।

ଅର୍ଥାତ୍ $A \cup B = \{x \mid x \in A$ ବା $x \in B\}$

ଭେନ୍ ଚିତ୍ର 1.2 ରେ A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ସଂଯୋଗ $A \cup B$ ସେଟ୍‌କୁ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇଛି।

$A \cup B$ ର **ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର :**



$A \cup B$ (ଚିତ୍ର 1.2)

ଏଠାରେ $x \in A$ ବା $x \in B$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି x ଉପାଦାନଟି A ରେ କିମ୍ବା B ରେ କିମ୍ବା ଉଭୟରେ ରହିପାରେ ।

ଉଦାହରଣ- 2 : $A = \{a,b,c\}$ ଓ $B = \{d, e, f, g\}$ ହେଲେ,

$A \cup B = \{a, b, c\} \cup \{d, e, f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

ଉଦାହରଣ- 3 : $A = \{1,2,3,4\}$ ଓ $B = \{2,4,6,8\}$ ହେଲେ,

$A \cup B = \{1,2,3,4\} \cup \{2,4,6,8\} = \{1,2,3,4,6,8\}$

A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ଉପାଦାନକୁ ନେଇ $A \cup B$ ସେଟ୍ ଗଠିତ ହେଲା।

ଉଦାହରଣ- 4 : $A = \{p,q,r\}$ ଓ $B = \{p,q,r,s\}$ ହେଲେ,

$A \cup B = \{p,q,r\} \cup \{p,q,r,s\} = \{p,q,r,s\}$ ହେବ ।

ସଂଯୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ତଥ୍ୟ :

1. **$A \subset B$ ହେଲେ, $A \cup B = B$ ହେବ।** ପୁନଶ୍ଚ **$B \subset A$ ହେଲେ, $A \cup B = A$ ହେବ ।**

2. ଯେ କୌଣସି ସେଟ୍ A ସହିତ Aର ସଂଯୋଗ A ଅଟେ। ଅର୍ଥାତ୍ **$A \cup A = A$**

3. ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ϕ ରେ କୌଣସି ଉପାଦାନ ନ ଥିବାରୁ ଯେ କୌଣସି ସେଟ୍ A ସହିତ ଏହାର ସଂଯୋଗ A ଅଟେ। ଅର୍ଥାତ୍ **$A \cup \phi = A$**

4. $A \cup B$ ସେଟ୍‌ଟି A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ। ତେଣୁ A ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ $A \cup B$ ରେ ରହିବେ; ତଥା B ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ $A \cup B$ ରେ ରହିବେ। ଅର୍ଥାତ୍ **$A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$**

ସଂଯୋଗର ନିୟମ :

- ସଂଯୋଗ କ୍ରମବିନିମୟୀ ଅର୍ଥାତ୍ A ଓ B ର ସଂଯୋଗ, B ଓ A ର ସଂଯୋଗ ଏକା ସେଟ୍ ମିଳେ। ସୁତରାଂ $A \cup B = B \cup A$
- ସଂଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ସହଯୋଗୀ ଅର୍ଥାତ୍ A, B, C ଯେକୌଣସି ସେଟ୍ ହୋଇଥିଲେ

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

ଉଦାହରଣ- 5 :

$A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5,6\}$ ଓ $C = \{6,7,8\}$ ହେଲେ $S = (A \cup B) \cup C$

ଓ $T = A \cup (B \cup C)$ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $S = T$

ସମାଧାନ : $A \cup B = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore S = (A \cup B) \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cup \{6, 7, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$B \cup C = \{3, 4, 5, 6\} \cup \{6, 7, 8\} = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$\therefore T = A \cup (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

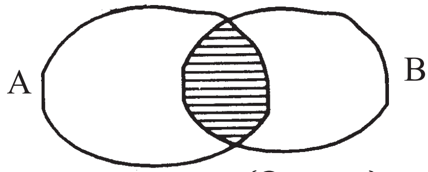
$\therefore S = T$ କିମ୍ବା $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) ଛେଦ (Intersection) :

ସଂଜ୍ଞା : A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟରେ ଥିବା ଉପାଦାନମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ ଉଭୟ A ଓ B ର ଉପାଦାନ ହୋଇଥିବେ ସେହିମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ର ଛେଦ କୁହାଯାଏ। A ଓ Bର ଛେଦ $A \cap B$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cap B = \{x \mid x \in A}$ **ଓ** $\mathbf{x \in B\}}$

ଏଠାରେ $x \in A$ ଓ $x \in B$ ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି x, A ଓ Bର ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ। ଅର୍ଥାତ୍ x, A ଓ B ଉଭୟ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ।

ଛେଦର ଭେନ୍‌ଚିତ୍ର :



$A \cap B$ (ଚିତ୍ର 1.3)

$A \cap B$ କୁ ଭେନ୍‌ଚିତ୍ରରେ ସମାନ୍ତର ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଯାଇଛି।

ଯଦି A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ (Common Elements) ନ ଥାଏ, ତେବେ A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟକୁ ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ (Disjoint set) କୁହାଯାଏ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cap B = \phi}$

ଉଦାହରଣ- 6 : $A = \{1, 2, 3\}$ ଓ $B = \{1,3,5\}$ ହେଲେ, $A \cap B = \{1,3\}$

ଉଦାହରଣ- 7 : $A = \{a,b,c\}$ ଓ $B = \{a,b,c,d,e\}$ ହେଲେ,

$A \cap B = \{a,b,c\} \cap \{a,b,c,d,e\} = \{a,b,c\}$

ଉଦାହରଣ- 8 : $A = \{p, q\}$ ଓ $B = \{r, s, t\}$ ହେଲେ;

$A \cap B = \{p, q\} \cap \{r,s,t\} = \phi$ ଅର୍ଥାତ୍ A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ଅଣଛେଦୀ

ଛେଦ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ତଥ୍ୟ :

(1) ଯଦି $\mathbf{A \subset B}$ **ହୁଏ ତେବେ,** $\mathbf{A \cap B = A}$ ଏବଂ $\mathbf{B \subset A}$ **ହେଲେ** $\mathbf{A \cap B = B}$

(2) ଯେକୌଣସି ସେଟ୍ A ଓ ସେହି ସେଟ୍‌ର ଛେଦ A ଅଟେ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cap A = A}$

(3) ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ϕ ରେ କୌଣସି ଉପାଦାନ ନ ଥିବାରୁ ଯେକୌଣସି ସେଟ୍ A ସହିତ ଏହାର ଛେଦ ϕ ହେବ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cap \phi = \phi}$

(4) $A \cap B$ ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ A ଓ B ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍‌ର ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ହୋଇଥିବାରୁ $A \cap B \subset A$ ଓ $A \cap B \subset B$

ଛେଦର ନିୟମ :

- ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ। ଅର୍ଥାତ୍ $A \cap B = B \cap A$
- ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ଅର୍ଥାତ୍ A, B, C ଯେକୌଣସି ସେଟ୍ ତେବେ

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ଉଦାହରଣ- 9 : $A = \{a, b, c\}$ $B = \{b, c, d, e\}$ ଓ $C = \{a, b, c, d\}$ ହେଲେ

ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

ସମାଧାନ : $A \cap B = \{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$

$\therefore (A \cap B) \cap C = \{b, c\} \cap \{a, b, c, d\} = \{b, c\}$ .....(i)

ପୁନଶ୍ଚ $B \cap C = \{b, c, d, e\} \cap \{a, b, c, d\} = \{b, c\}$

$\therefore A \cap (B \cap C) = \{a, b, c\} \cap \{b, c\} = \{b, c\}$ .....(ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ବଣ୍ଟନ ନିୟମ (Distributive law) :

ମନେକର A, B ଓ C ତିନିଗୋଟି ସେଟ୍। ତେବେ

(a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ଅର୍ଥାତ୍ ସଂଯୋଗ ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ଏବଂ

(b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ଅର୍ଥାତ୍ ଛେଦ ସଂଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ।

ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୁଣନ (x) ଯୋଗ (+) କୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ଅର୍ଥାତ୍ $x(y+z) = xy + xz$; ମାତ୍ର ଯୋଗ ଗୁଣନକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ନାହିଁ; କାରଣ $x + (yz) \neq (x + y)(x + z)$ । କିନ୍ତୁ ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱରେ ସଂଯୋଗ ଓ ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟାଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ବଣ୍ଟନ କରିଥା'ନ୍ତି।

ଉଦାହରଣ- 10 : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ଓ $C = \{1, 3, 5\}$ ହେଲେ ସଂଯୋଗ ଓ ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ବଣ୍ଟନ ନିୟମଦ୍ୱୟର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

ସମାଧାନ : $A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup (\{3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 3, 5\})$

$= \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3,5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\}) \cap (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{1, 3, 5\})$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .... (i) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅର୍ଥାତ୍ ସଂଯୋଗ ଛେଦ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ।

ସେହିପରି $A \cap (B \cup C) = (1,2,3,4) \cap (\{3,4,5,6\} \cup \{1,3,5\})$

$= \{1,2,3,4\} \cap \{1,3,4,5,6\} = \{1,3,4\}$;

$(A \cap B) \cup (A \cap C) = (\{1,2,3,4\} \cap \{3,4,5,6\}) \cup (\{1,2,3,4\} \cap \{1,3,5\})$

$= \{3, 4\} \cup \{1, 3\} = \{1, 3, 4\}$

$\therefore A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .... (ii) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅର୍ଥାତ୍ ଛେଦ ସଂଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ।

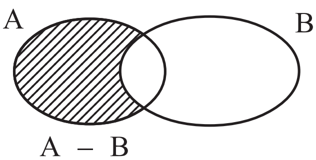
(iii) ଅନ୍ତର (Difference) :

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି A ଓ B ଦୁଇଟି ସେଟ୍, ତେବେ A ସେଟ୍‌ର ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ B ରେ ନାହାଁନ୍ତି ସେମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଅନ୍ତର B (A difference B) କୁହାଯାଏ ଏବଂ A ଅନ୍ତର B କୁ A – B ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A - B = \{x \mid x \in A}$ **ଓ** $\mathbf{x \notin B\}}$

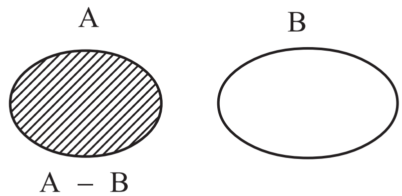
B ସେଟ୍‌ରେ ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ A ରେ ନାହାଁନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ନେଇ B ଅନ୍ତର A ସେଟ୍ ଟି ଗଠିତ। ଅର୍ଥାତ୍

$\mathbf{B - A = \{x \mid x \in B}$ **ଓ** $\mathbf{x \notin A\}}$

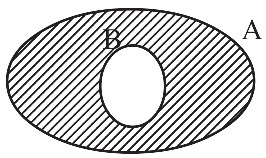
ନିମ୍ନ ଚିତ୍ରରେ ବିଭିନ୍ନ ପରିସ୍ଥିତିରେ A – B ସେଟ୍‌କୁ ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦର୍ଶନ କରାଯାଇଛି। ଚିତ୍ରରେ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଚିତ୍ରିତ ସେଟ୍‌ଟି A – B



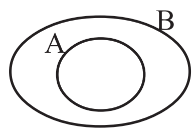
(i) A ଓ B ପରସ୍ପର ଛେଦୀ ସେଟ୍



ii) A ଓ B ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ସେଟ୍ A – B = A



(iii) $B \subset A$



(iv) $A \subset B$, $A - B = \phi$

(A – B ସେଟ୍‌ଟି ଶୂନ୍ୟସେଟ୍)

(ଚିତ୍ର 1.4)

ଉଦାହରଣ- 11 :

$A = \{1, 2, 3, 4\}$ ଓ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ହେଲେ, ଏଠାରେ,

$A - B = \{1,2,3,4\} - \{3,4,5,6\} = \{1, 2\}$ ଏବଂ $B - A = \{3,4,5,6\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{5, 6\}$

ସେଟ୍ ଅନ୍ତର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ତଥ୍ୟ :

1. କୌଣସି ଏକ ସେଟ୍ A ପାଇଁ $\mathbf{A - A = \phi}$

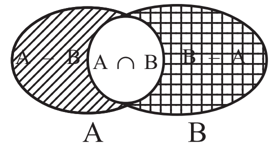
2. ଚିତ୍ର 1.4 ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟଯେ $\mathbf{A - B \subset A}$ **ଓ** $\mathbf{B - A \subset B}$

ଯଦି A ଓ B ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସେଟ୍ ତେବେ

$(A - B) \cap (B - A) = \phi$,

$(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$ ଏବଂ

$(B - A) \cap (A \cap B) = \phi$



(ଚିତ୍ର 1.5)

ଅର୍ଥାତ୍ **A – B, B – A ଓ A ∩ B ସେଟ୍‌ତ୍ରୟ ପରସ୍ପର ଅଣଛେଦୀ ।** (ଚିତ୍ର 1.5 ଦେଖ)

ପୁନଶ୍ଚ ଚିତ୍ର 1.5 ରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ,

$\mathbf{A - B = A - (A \cap B), B - A = B - (A \cap B)}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସେଟ୍ ଅନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି କ୍ରମବିନିମୟୀ ନୁହେଁ। ଅର୍ଥାତ୍ $A - B \neq B - A$

କାରଣ $A = \{1, 2\}$ ଓ $B = \{2,3\}$ ହେଲେ $A - B = \{1\}$ ଓ $B - A = \{3\}$

ଏବଂ ସେଟ୍ ଅନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ସହଯୋଗୀ ନୁହେଁ । $A - (B - C) \neq (A - B) - C$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $A = \{1,2\}$, $B = \{2\}$ ଓ $C = \{2,3\}$ ହେଲେ,

$$A - (B - C) = \{1,2\} \text{ ଓ } (A - B) - C = \{1\}$$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(a)

1. ବନ୍ଧନୀରୁ ଠିକ୍ ଚିହ୍ନ ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

   (i) a... {a,b,c} $[\in, \notin, \subset, =]$ (ii) d .... {a,b,c} $[\in, \notin, \subset, =]$

   (iii) {a,c,b} .... {a,b,c} $[\in, \notin, =, \neq]$ (iv) {a,a,b,c} ... {a,b,c} $[\in, \notin, =, \neq]$

   (v) {a} .. {a, b, c} $[=, \subset, \in, \supset]$ (vi) {a,b, c} ... {a} $[=, \subset, \in, \neq]$

2. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{3,4,5\}$ ଓ $C = \{5,6\}$ ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ନିରୂପଣ କର।

   (i) $B \cup C$ (ii) $A \cup B$ (iii) $A \cup C$ (iv) $B \cap C$ (v) $A \cap B$ (vi) $A \cap C$
   (vii) $B - C$ (viii) $A - B$ (ix) $A - C$ (x) $C - B$ (xi) $B - A$ (xii) $C - A$

3. $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{4,5,6,7\}$, $C = \{6,7,8,9\}$ ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର ।

   (i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $B \cap C = C \cap B$

   (iii) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (iv) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

   (v) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   (vi) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

   (vii) $A - B \neq B - A$

   (viii) $(A - B) - C \neq A - (B - C)$

4. ନିମ୍ନରେ ସୂଚିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍, ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରେ ଦିଆଯାଇଥିବା କେଉଁ ସେଟ୍ ସହ ସମାନ?

(i) $\{x \mid x^2 - 1 = 0\}$ $[\phi, \{1\}, \{-1\}, \{1,-1\}, \{0, 1\}]$

(ii) {x | x ସଂଖ୍ୟାଟି 6 ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା}

$[\phi, \{1, 2, 3, 4, 5\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 5\}]$

(iii) {x | x ଏକ ଯୁଗ୍ମ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ $2 < x < 4$} $[\phi, (2), (4), (2,4)]$

(iv) $\{x \mid x \in N^*, x \le 3\}$ $[\{0, 1, 2\}, \{0, 3\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2, 3\}]$

5. $A = \{a, b, d, e, p\}$ ଓ $B = \{b, p, a, n, m, x, y\}$, $C = [n, x, z, s, t)$ ହେଲେ

(i) $(A - B) \cup (A \cap B)$,
(ii) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$
(iii) $(A \cap B) \cup (B - C)$ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖ।

6. $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{a, e, i, o, u\}$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ,
(i) $(A - B) \cap (A \cap B) = \phi$, $(B - A) \cap (A \cap B) = \phi$, ଏବଂ
(ii) $(A - B) \cap (B - A) = \phi$

7. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍ ଗୁଡ଼ିକର ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର।

(i) $(A \cap B) \cup (A - B)$, (ii) $(A \cap B) \cup (B - A)$
(iii) $(A \cup B) - (A \cap B)$

8. ଏକ ଉଦାହରଣ ନେଇ ଦର୍ଶାଅ ଯେ-

$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

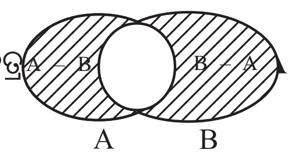
(ଯେଉଁଠାରେ A ଓ B ପ୍ରତ୍ୟେକ ସସୀମ ସେଟ୍)

9. ଯଦି $I_n = \{1,2,3,4, \ldots\ldots\ldots\ldots, n\}$ ହୁଏ ତେବେ $I_{20} - I_{16}$ ଏବଂ $I_{16} - I_{20}$ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟକୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖ।

1.5. ସମଞ୍ଜସ ଅନ୍ତର (Symmetric – Difference) :

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି A ଓ B ଯେ କୌଣସି ଦୁଇଟି ସେଟ୍, ତେବେ A – B ଓ B – A ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ର ସମଞ୍ଜସ- ଅନ୍ତର ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହାକୁ $A \Delta B$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)}$

A Δ B ସେଟ୍‌ଟି ସମାନ୍ତର ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଚିତ୍ର



(ଚିତ୍ର 1.6)

$\mathbf{A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)}$

ଅର୍ଥାତ୍ $(A \cup B)$ ସେଟ୍‌ର ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ $(A \cap B)$ ରେ ନାହାଁନ୍ତି, ସେମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ସମଞ୍ଜସ ଅନ୍ତର B କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ- 12 : $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ଓ $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ନେଇ $A \Delta B$ ସେଟ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : $A - B = \{1, 2\}$ ଓ $B - A = \{5, 6\}$

$\therefore A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \{1, 2\} \cup \{5, 6\} = \{1, 2, 5, 6\}$

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ: $A \Delta B = (A \cup B) - (B \cap A)$

$= (\{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5, 6\}) - (\{1, 2, 3, 4\} \cap \{3, 4, 5, 6\})$

$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{3, 4\} = \{1, 2, 5, 6\}$ (ଉତ୍ତର)

ସମଞ୍ଜସ ଅନ୍ତର ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ତଥ୍ୟ :

ଯଦି A ଓ B ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ସେଟ୍

(i) ସମଞ୍ଜସ– ଅନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ। ଅର୍ଥାତ୍ $A \Delta B = B \Delta A$

(ii) ସମଞ୍ଜସ ଅନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$ (ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

1.6. ଏକ ସେଟ୍‌ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ (Complement of a Set) :

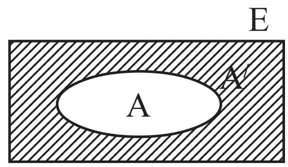
ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି E ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ଓ A ଏହାର ଏକ ଉପସେଟ୍ ତେବେ, E ସେଟ୍‌ର ଯେଉଁ ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ A ସେଟ୍‌ରେ ନାହାଁନ୍ତି ସେହିମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ସେଟ୍‌ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଓ

ଏହା A' ସଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୋଇଥାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $A' = E - A = \{x \mid x \in E$ ଓ $x \notin A\}$

A ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ A' କୁ ଚିତ୍ର 1.7 ରେ

ସମାନ୍ତର ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୋଇଛି।



(ଚିତ୍ର 1.7)

ଉଦାହରଣ- 13 : $E = \{x \mid x \in N, x \le 10\}$ ଏବଂ

$A = \{x \mid x \in N, 1 < x \le 5\}$ ନେଇ A ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍‌ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $E = \{x \mid x \in N, x \le 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$A = \{x \mid x \in N, 1 < x \le 5\} = \{2, 3, 4, 5\}$

$\therefore$ A ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ $= A' = E - A = \{1, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (ଉତ୍ତର)

ପରିପୂରକ ସେଟ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେଗୋଟି ତଥ୍ୟ :

1. A ଓ ଏହାର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ (A') ସର୍ବଦା ଅଣଛେଦୀ। ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cap A' = \phi}$

2. A ଓ A' ର ସଂଯୋଗ ସେଟ୍ ହେଉଛି ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ (E) । ଅର୍ଥାତ୍ $\mathbf{A \cup A' = E}$

3. A ଗୋଟିଏ ସେଟ୍ ହେଲେ, A ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ A' ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ A ଅଟେ।

   ଅର୍ଥାତ୍ $(A')' = A$

4. $\phi' = E$ (ଶୂନ୍ୟସେଟ୍ ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E)

   ଓ $E' = \phi$ (ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍‌ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ ଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ϕ) ।

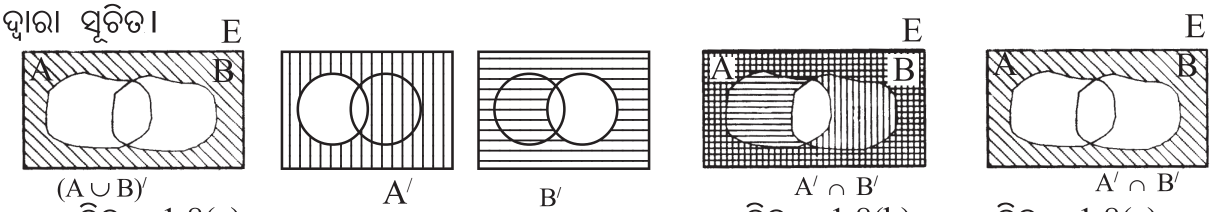
1.7 ଡିମର୍ଗାନ୍ ନିୟମ (De Morgan's Laws) :

ମନେକର E ଏକ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ଓ A, B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ଏହାର ଉପସେଟ୍ ।

$\mathbf{(A \cup B)' = A' \cap B'}$ **...(i)** ଏବଂ $\mathbf{(A \cap B)' = A' \cup B'}$ **...(ii)**

ଏହି ନିୟମ ଦ୍ୱୟ ଡିମର୍ଗାନ୍ (De Morgan) ନିୟମ ନାମରେ ଅଭିହିତ। (i) ରୁ ଆମେ ବୁଝୁଛେ ଯେ ସଂଯୋଗ ର ପରିପୂରକ ସେଟ୍, ପରିପୂରକ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ଛେଦ ଓ (ii) ରୁ ବୁଝୁଛେ ଯେ ଛେଦର ପରିପୂରକ ସେଟ୍, ପରିପୂରକ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କ ସଂଯୋଗ ।

ମନେରଖ : ପରିପୂରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Complementation) ହେତୁ ସଂଯୋଗ, ଛେଦରେ ଓ ଛେଦ, ସଂଯୋଗରେ ପରବର୍ତ୍ତିତ ହୁଏ। ଭେନ ଚିତ୍ର 1.8 (a) ରେ $(A \cup B)'$ ସେଟ୍‌ଟି କେତେକ ସମାନ୍ତର ରେଖା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ।



ଚିତ୍ର 1.8(a) ଚିତ୍ର 1.8(b) ଚିତ୍ର 1.8(c)

ଚିତ୍ର 1.8(b) ରେ A' ଓ B' ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟକୁ ଉଭୟ ଲମ୍ବ ଓ ଆନୁଭୂମିକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଯାଇଛି । ଯାହା ପରସ୍ପରଛେଦୀ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା $A' \cap B'$ ସୂଚିତ ହୋଇଛି, ଯାହା 1.8(a) ସହ ସମାନ।

ଚିତ୍ର 1.8(c)ରେ $A' \cap B'$ କୁ ସ୍ୱତନ୍ତ୍ର ଭାବେ ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ । ସୁତରାଂ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ଅନୁରୂପ ଭାବେ ଡିମର୍ଗାନ୍‌ଙ୍କର ଦ୍ୱିତୀୟ ନିୟମ $(A \cap B)' = A' \cup B'$ ର ସତ୍ୟତା ଭେନ୍ ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରତିପାଦନ କରାଯାଇ ପାରେ।

ମାତ୍ର ନିୟମ (ii) ମଧ୍ୟ ନିୟମ (i) ସାହାଯ୍ୟରେ ପ୍ରମାଣ କରି ହେବ।

$(A \cup B)' = A' \cap B'$ ....(i)

A ଓ B ପରିବର୍ତ୍ତେ ଯଥାକ୍ରମେ A' ଓ B' ଲେଖିଥିଲେ

$(A' \cup B')' = (A')' \cap (B')' = A \cap B$ ($\because (A')' = A$ ଏବଂ $(B')' = B$)

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ପରିପୂରକ ସେଟ୍ ନେଲେ

$\Rightarrow ((A' \cup B')')' = (A \cap B)' \Rightarrow A' \cup B' = (A \cap B)'$

$\therefore (A \cap B)' = A' \cup B'$ .....(ii) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ- 14 : $E = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ଏବଂ $B = \{4, 5, 6, 7\}$ ନେଇ ଡିମର୍ଗାନ୍‌ଙ୍କ ନିୟମ ଦୁଇଟିର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \cup \{4, 5, 6, 7\} = \{1,2,3,4,5,6,7\}$

$\therefore (A \cup B)' = E - (A \cup B)$

$= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} - \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{8, 9\}$ .... (i)

$A' = E - A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 2, 3, 4, 5\} = \{6, 7, 8, 9\}$

$B' = E - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 3, 8, 9\}$

$A' \cap B' = \{6, 7, 8, 9\} \cap \{1, 2, 3, 8, 9\} = \{8, 9\}$ ... (ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ $(A \cup B)' = A' \cap B'$

ଅନୁରୂପଭାବେ ଡିମର୍ଗାନ୍‌ଙ୍କ ଦ୍ୱିତୀୟ ନିୟମର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କରାଯାଇ ପାରିବ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନ ପାଇଁ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଲେଖ।

(i) ଯଦି $E = \{1,2,3,4,5\}$ ଓ $S = \{2, 4\}$ ହୁଏ ତେବେ $S' =$ ....

(a) $\{1, 3\}$ (b) $\{1,4,5\}$ (c) $\{1,3,5\}$ (d) $\{1,2,5\}$

(ii) ଯଦି $E = \{a,b,c,d\}$ ଓ $T = \{a,b\}$ ତେବେ $T \cup T' =$....

(a) E (b) $\{a, b\}$ (c) $\{c, d\}$ (d) ϕ

(iii) ଯଦି $E = \{a,b,c,d\}$ ଓ $T = \{a,b\}$ ତେବେ $T \cap T' =$ ....

(a) E (b) $\{a, b\}$ (c) $\{c, d\}$ (d) ϕ

(iv) $(A \cup A') - (A' \cap A) =$ ——— (a) A (b) A' (c) E (d) ϕ

(v) $E - A' =$ —— (a) E (b) A (c) A' (d) ϕ

(vi) $(E - A) \cup (E - B) =$ ——

(a) $A \cup B$ (b) $(A \cup B)'$ (c) $(A \cap B)$ (d) $(A \cap B)'$

(vii) $A' \cap B' =$ ——

(a) $A \cup B$ (b) $(A \cup B)'$ (c) $(A \cap B)$ (d) $(A \cap B)'$

(viii) $(A - B) \cup (B - A) = $ ——

(a) $A \cup B$ (b) $A \Delta B$ (c) $A \cap B$ (d) B

(ix) $(A - B) \cup (B - A) = $ ——

(a) $(A \cup B) - (A \cap B)$ (b) $(A \cup B) - (A - B)$

(c) $(A-B)-(A \cap B)$ (d) $(A-B) \cap (B - A)$

(x) $(A \cup A')' = $ —— (a) A (b) A' (c) ϕ (d) E

(xi) $(A' \cup B')' = $ —— (a) $A \cap B$ (b) $A \cup B$ (c) $A' \cap B'$ (d) $(A \cup B)'$

(xii) $(A \cup B)' = $ —— (a) $A' \cup B'$ (b) $(A \cap B)'$ (c) $A' \cap B'$ (d) $E - (A \cap B)$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକୁ ବାଛି ଲେଖ ।

(i) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$ (ii) $A \Delta B = B \Delta A$

(iii) $(A \cup B)' = A' \cup B'$ (iv) $(A \cap B)' = A' \cup B'$ (v) $\phi' = E$

(vi) $E' = \phi$ (vii) $A \cup A' = \phi$ (viii) $A \cap A' = E$

(ix) $(A \cup A')' = E$ (x) $(A \cap A')' = \phi$

3. (i) E = Z ହେଲେ, ସମସ୍ତ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ପରିପୂରକ ସେଟ୍‌ଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $E - A = B$ ହେଲେ, $B \cap A$ ଓ $B \cup A$ ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର ପରିପୂରକ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖ ।

(iii) ସେଟ୍ A ଓ ଏହାର ପରିପୂରକ ସେଟ୍‌ରେ ଯଥାକ୍ରମେ 5 ଓ 6 ଟି ଉପାଦାନ ଥିଲେ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E ରେ ଥିବା ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

4. ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱାରା ଦର୍ଶାଅ ଯେ, ''ସମଞ୍ଜସ ଅନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା କ୍ରମବିନିମୟୀ'' ।

5. ଯଦି ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, b, c\}$ ଏବଂ $C = \{b,f,g,h\}$ ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

6. ଏକ ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱାରା ଡିମର୍ଗାନ୍‌ଙ୍କ ନିୟମ ଦ୍ୱୟର ସତ୍ୟତା ପ୍ରତିପାଦନ କର ।

1.8 ଦୁଇଟି ସେଟ୍‌ର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ (Cartesian product of two sets) :

ସମତଳ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ ଏହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x,y) ଦ୍ୱାରା ସୂଚାଇ ଦିଆଯାଏ । (x,y) ହେଉଛି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ଏକ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (Ordered Pair)।

ମନେରଖ :

(i) ଯଦି x ଓ y ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ତେବେ, (x,y) କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସମତଳରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ; ମାତ୍ର $\{x, y\}$ ଗୋଟିଏ ସେଟ୍ ଯାହାର ଦୁଇଗୋଟି ଉପାଦାନ ଅଛି ।

(ii) ଯଦି $x \neq y$ ହୁଏ, ତେବେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ (x,y) ଓ (y,x) ଦୁଇଟି ପୃଥକ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଇ ଥାଆନ୍ତି। କିନ୍ତୁ {x, y} ଓ {y, x} ସେଟ୍ ଦୁଇଟି ସମାନ।

ବି.ଦ୍ର. : ଦୁଇଟି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) ସମାନ ହେବେ ଯଦି $x_1 = x_2$ ଓ $y_1 = y_2$ ହେବ।

ଏହି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ର ଧାରଣାକୁ ନେଇ ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ A ଓ B ର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ A x B ସୃଷ୍ଟି କରାଯାଇ ପାରିବ।

ମନେକର A ଓ B ଦୁଇଗୋଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍ ଓ $a \in A$, $b \in B$ ।

ଏଠାରେ (a,b) ଏକ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି, ଯେଉଁଠାରେ a ଓ b କୁ ଯଥାକ୍ରମେ କ୍ରମିତଯୋଡ଼ି (a,b) ର ପ୍ରଥମ ଉପାଂଶ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ ଉପାଂଶ କୁହାଯାଏ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି A ଓ B ଦୁଇଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ସେଟ୍, ତେବେ A ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ପ୍ରଥମ ଉପାଂଶ ଓ B ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଉପାଂଶ ରୂପେ ନେଲେ ଯେତେଗୁଡ଼ିଏ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ସୃଷ୍ଟି ହେବ, ସେହି ସମସ୍ତ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କୁ ଉପାଦାନ ରୂପେ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍‌କୁ A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ କୁହାଯାଏ।

A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ A x B ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ। ସୁତରାଂ

A x B = {(a,b)। $a \in A$ ଓ $b \in B$ }

ସେହିପରି B ଓ A ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟର କାର୍ଟେଜୟ ଗୁଣଫଳ **B x A = {(b,a) I $b \in B$ ଓ $a \in A$}**

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ A = {1,2} ଓ B = {3,4,2} ହେଲେ

A x B ={(1,3), (1,4), (1,2), (2,3), (2,4), (2,2)}

ଓ B x A = {(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (2,1), (2,2)}

ଯଦି A ରେ m ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ଥାଏ ଓ B ରେ n ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ଥାଏ, ଅର୍ଥାତ୍ $|A| = m$ ଓ $|B| = n$ ତେବେ କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣଫଳ A x B ଓ B x A ପ୍ରତ୍ୟେକ ସେଟ୍‌ରେ mn ସଂଖ୍ୟକ ଉପାଦାନ ରହିବେ।

ଉଦାହରଣ- 15 : ଯଦି (x + 1, 2) = (3, y – 1) ତେବେ x ଓ y ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : (x + 1, 2) = (3, y – 1)

କ୍ରମିତଯୋଡ଼ି ଦ୍ୱୟର ସମାନତା ରୁ ପାଇବା $x + 1 = 3$ ଏବଂ $2 = y - 1$

$\therefore x = 2$ ଏବଂ $y = 3$

ଉଦାହରଣ- 16 : A = {1,2,3} ଓ B = {3,4,5} ହେଲେ A x B ଏବଂ B x A ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : A x B = {1,2,3} x {3,4,5}

= {(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5), (3,3), (3,4), (3,5)}

ଏବଂ B x A = {3,4,5} x {1,2,3}

= {(3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (4,3), (5,1), (5,2), (5,3)}

ଉଦାହରଣ- 17 : A = {a,b,c} ହେଲେ A x A ଅଥବା A^2 ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : A x A = (a,b,c) x (a,b,c)

= {(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (c,a), (c,b), (c,c)}

A x A କୁ A^2 ରୂପେ ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଏ।

1.9. ଦୁଇଟି ସେଟ୍ A ଓ B ର ସଂଯୋଗ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ :

ଉପପାଦ୍ୟ : ଯଦି ଉଭୟ A ଓ B ସସୀମ ସେଟ୍, ତେବେ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

ପ୍ରମାଣ : ଆମେ A ଓ B ର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ପୃଥକ ଭାବରେ ଗଣିବା। ପ୍ରାପ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ଯୋଗଫଳ |A| + |B| ହେବ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଯଦି A ଓ B ଦୁଇଟି ପରସ୍ପରଛେଦୀ ସେଟ୍ ତେବେ ଆମେ $A \cap B$ ସେଟ୍ ଗଠନ କରିବା ଓ ଏହାର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଗଣିବା।

ପ୍ରଶ୍ନ ହେଉଛି $A \cup B$ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ହେବ?

A ଓ B ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକୁ ପୃଥକ ଭାବରେ ଗଣିବା ସମୟରେ ଆମକୁ ଉଭୟ A ଓ B ସେଟ୍‌ରେ ଥିବା ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକୁ ଦୁଇଥର ଗଣିବାକୁ ପଡୁଛି।

ମାତ୍ର $A \cup B$ ସେଟ୍ ଗଠନ ବେଳେ A ଓ B ଉଭୟରେ ଥିବା ସାଧାରଣ ଉପାଦାନକୁ ଦୁଇ ଥର ଲେଖାଏଁ ନ ନେଇ ଥରେ ଲେଖାଯିବ। ଏହା ଆମେ ଜାଣିଛେ। (ଚିତ୍ର 1.3 ଦେଖ)

$\therefore$ $A \cup B$ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା =

A ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା + B ସେଟ୍ ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା– $A \cap B$ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା

$\Rightarrow |A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

ସୂଚନା : ଯଦି |A| = m, |B| = n ଏବଂ $|A \cap B| = r$ ହୁଏ ତେବେ

$|A \Delta B| = m + n - 2r$ ହେବ।

ଅର୍ଥାତ୍ $|A \Delta B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ (ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : ଯଦି A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ଅଣଛେଦୀ ତେବେ $A \cap B = \phi \Rightarrow |A \cap B| = 0$

$\therefore$ A ଓ B ଅଣଛେଦୀ ହେଲେ $|A \cup B| = |A| + |B|$ ହେବ।

ନିମ୍ନରେ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ପାଇଁ $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ ସୂତ୍ରର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇଛି। ପରବର୍ତ୍ତୀ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ।

ଉଦାହରଣ- 18 : A ଓ B ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E ର ଉପସେଟ୍। ଯଦି |E| = 100, $|A \cup B| = 70$ ଏବଂ $|A \Delta B| = 60$ ହୁଏ, ତେବେ $|A' \cup B'|$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.....(i)

ଏବଂ $|A \Delta B = |A| + |B| - 2|A \cap B|$ ....(ii)

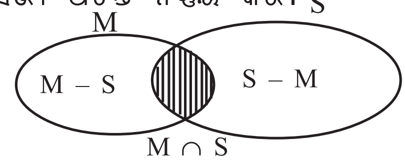
(i) ରୁ (ii) ବିୟୋଗ କଲେ $|A \cup B| - |A \Delta B| = |A \cap B|$

$\Rightarrow 70 - 60 = |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = 10$

$\therefore |A' \cup B'| = |(A \cap B)'| = |E| - |A \cap B| = 100 - 10 = 90$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 19 : ଗଣିତସଂସଦ କିମ୍ବା ବିଜ୍ଞାନପ୍ରଚାର ସମିତି ର ମୋଟ ସଭ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 750। କେବଳ ଗଣିତସଂସଦ ର ସଭ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 250 ଓ କେବଳ ବିଜ୍ଞାନ ପ୍ରଚାର ସମିତିର ସଭ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା 350। ତେବେ କେତେଜଣ ଉଭୟ ଗଣିତସଂସଦ ଓ ବିଜ୍ଞାନ ପ୍ରଚାର ସମିତି ର ସଭ୍ୟ ଅଟନ୍ତି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ସମାଧାନ : ଭେନ୍ ଚିତ୍ରକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର।



(ଚିତ୍ର 1.9)

ମନେକର ଗଣିତସଂସଦର ସଭ୍ୟଙ୍କ ସେଟ୍ ଏବଂ ବିଜ୍ଞାନପ୍ରଚାର ସମିତିର ସଭ୍ୟଙ୍କ ସେଟ୍ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ S ।

ତେବେ ଉଭୟ ଗଣିତସଂସଦ ଓ ବିଜ୍ଞାନପ୍ରଚାର ସମିତିର ସଭ୍ୟଙ୍କ ସେଟ୍ $= M \cap S$

ଗଣିତସଂସଦ କିମ୍ବା ବିଜ୍ଞାନପ୍ରଚାର ସମିତିର ସଭ୍ୟମାନଙ୍କ ସେଟ୍ $= M \cup S$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $|M-S| = 250$, $|S-M| = 350$ ଓ $|M \cup S| = 750$

ଭେନ୍ ଚିତ୍ରରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, $(M \cup S) = (M - S) \cup (M \cap S) \cup (S - M)$

ସୁତରାଂ $|M \cup S| = |M - S| + |M \cap S| + |S - M|$

$\Rightarrow 750 = 250 + |M \cap S| + 350$

$\Rightarrow 750 = 600 + |M \cap S|$

$\Rightarrow |M \cap S| = 750 - 600 = 150$

$\therefore$ 150 ଜଣ ଉଭୟ ଗଣିତସଂସଦ ଓ ବିଜ୍ଞାନପ୍ରଚାର ସମିତିର ସଭ୍ୟ ଅଛନ୍ତି। (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 20 : କୌଣସି ଶ୍ରେଣୀରେ 50 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 22 ଜଣ ଫୁଟ୍‌ବଲ୍ ଓ 22 ଜଣ କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳନ୍ତି। ଏଥିମଧ୍ୟରୁ 5 ଜଣ ଛାତ୍ର ଉଭୟ ଫୁଟ୍‌ବଲ ଓ କ୍ରିକେଟ ଖେଳୁଥିଲେ କେତେ ଜଣ ଛାତ୍ର ଫୁଟ୍‌ବଲ କିମ୍ବା କ୍ରିକେଟ୍ କୌଣସିଟିକୁ ଖେଳନ୍ତି ନାହିଁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର E = ଶ୍ରେଣୀରେ ଥିବା ସମସ୍ତ ଛାତ୍ରଙ୍କ ସେଟ୍।

F = ଫୁଟ୍‌ବଲ ଖେଳୁଥିବା ଛାତ୍ରଙ୍କ ସେଟ୍, C = କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳୁଥିବା ଛାତ୍ରଙ୍କ ସେଟ୍।

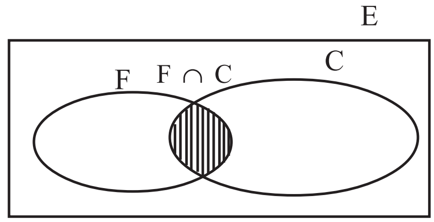
ଏଠାରେ E କୁ ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ ରୂପେ ନିଆଯାଇଛି ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ $|E| = 50$, $|F| = 22$, $|C| = 22$

ଉଭୟ ଫୁଟ୍‌ବଲ ଓ କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳୁଥିବା ଛାତ୍ରମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌ଟି ହେଉଛି $F \cap C$

$|F \cap C| = 5$ (ଦତ୍ତ)

ଚିତ୍ର 1.10 କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର।



(ଚିତ୍ର 1.10)

ଆମେ ଜାଣୁଯେ, $|F \cup C| = |F| + |C| - |F \cap C|$

$= 22 + 22 - 5 = 39$

ଯେଉଁ ଛାତ୍ରମାନେ ଫୁଟ୍‌ବଲ୍ କିମ୍ବା କ୍ରିକେଟ୍ କୌଣସିଟିକୁ ଖେଳନ୍ତି ନାହିଁ ସେମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌ଟି $(F \cup C)'$

$\therefore |(F \cup C)'| = |E| - |F \cup C| = 50 - 39 = 11$

$\therefore$ ଶ୍ରେଣୀରେ ଫୁଟବଲ୍ ଓ କ୍ରିକେଟ୍ କୌଣସିଟିକୁ ଖେଳୁ ନଥିବା ଛାତ୍ରଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା 11 ।

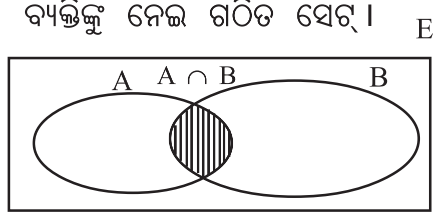
ଉଦାହରଣ- 21 : 1000 ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ 400 ଜଣ ହିନ୍ଦୀ, 380 ଜଣ ଇଂରାଜୀ ଓ 80 ଜଣ ଉଭୟ ହିନ୍ଦୀ ଓ ଇଂରାଜୀରେ କଥାବାର୍ତ୍ତା ହୋଇ ପାରନ୍ତି। ତେବେ କେତେ ଜଣ ଏ ଦୁଇଟି ଭାଷାରେ କଥାବାର୍ତ୍ତା ହୋଇ ପାରନ୍ତି ନାହିଁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ବ୍ୟାପକ ସେଟ୍ E = 1000 ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କୁ ନେଇ ଗଠିତ ସେଟ୍।

ତେବେ $|E| = 1000$

ହିନ୍ଦୀରେ କଥା ହୋଇ ପାରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସେଟ୍ A ଓ

ଇଂରାଜୀରେ କଥା ହୋଇ ପାରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସେଟ୍ B



(ଚିତ୍ର 1.11)

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $|A| = 400$, $|B| = 380$ ଏବଂ $|A \cap B| = 80$ (ଉଭୟ ହିନ୍ଦୀ ଓ ଇଂରାଜୀ ଭାଷାରେ କଥା ହୋଇପାରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା)

ହିନ୍ଦୀ କିମ୍ବା ଇଂରାଜୀରେ କଥା ହୋଇପାରୁଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସେଟ୍ = $A \cup B$.

ମାତ୍ର $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 400 + 380 - 80 = 700$

$\therefore$ ହିନ୍ଦୀ ବା ଇଂରାଜୀ କୌଣସିଟିରେ କଥା ହୋଇ ପାରୁ ନ ଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା

$= |(A \cup B)'| = |E| - |A \cup B| = 1000 - 700 = 300$

$\therefore$ ହିନ୍ଦୀ ବା ଇଂରାଜୀ କୌଣସିଟିରେ କଥା ହୋଇ ପାରୁ ନ ଥିବା ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା 300 । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(c)

1.(a) ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସାମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତର ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର।

(i) $|A| = 3$ ଓ $|B| = 4$ ହେଲେ $A \times B$ ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ——

[(a) 7 (b) 10 (c) 11 (d) 12]

(ii) $|A| = 3$ ହେଲେ $|A \times A| =$ ——

[(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) ଏଥିମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ନୁହେଁ।]

(iii) $|A \cup B| = 15$, $|A| = 12$ ଓ $|B| = 6$ ହେଲେ $|A \cap B| =$ ———

[(a) 3 (b) 6 (c) 9 (d) 12]

(iv) $|A \cup B| = 10$, $|A \cap B| = 0$ ଓ $|A| = 4$ ହେଲେ $|B| =$ ——

[(a) 0 (b) 4 (c) 6 (d) 12]

(v) $A \cap B = \phi$, $|A| = 10$, $|B| = 3$ ହେଲେ $|A \cup B| =$ ——

(a)3 (b) 7 (c) 10 (d) 13

(vi) $|A| = |B| = 5$ ଓ $|A \cap B| = 3$ ହେଲେ $|A \Delta B| =$ ——

[(a) 3 (b) 4 (c) 7 (d) 8]

(vii) $|A \cup B| = 10$ ଓ $|A \cap B| = 3$ ହେଲେ $|A \Delta B| =$ ——

[(a) 10 (b) 7 (c) 3 (d) 0]

(viii) $|A - B| = 5$ ଓ $|B - A| = 7$ ହେଲେ $|A \Delta B| =$ ——

[(a) 2 (b) 12 (c) 7 (d) 5]

(b) ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ x ଓ y ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) ଯଦି $(2 - x, 5) = (4, y+2)$ (ii) ଯଦି $(2x+3, 3y-4) = (7,5)$

(iii) ଯଦି $(x^2, y^2) = (4,9)$ (iv) ଯଦି $(x+y, x-y) = (3,1)$

(c) ଯଦି $A = \{1, 2, 3\}$ ଓ $B = \{2, 3,4\}$ ତେବେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସେଟ୍‌ମାନଙ୍କୁ ତାଲିକା ପଦ୍ଧତିରେ ଲେଖ ।

(i) $\{(x,y) \mid (x,y) \in A \times B$ ଓ $x < y\}$ (ii) $\{(x,y) \mid (x,y) \in B \times A$ ଓ $x < y\}$

2. A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ପାଇଁ $|A| = 60$, $|B| = 40$ ଓ $|A \Delta B| = 70$ ହେଲେ A ଓ B ର ସାଧାରଣ ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା ନିରୂପଣ କର ।

3. A ଓ B ସେଟ୍ ଦ୍ୱୟ ପାଇଁ $|A| = 80$, $|B| = 30$ ଓ $|A \cup B| = 100$ ହେଲେ $|A \Delta B|$ କେତେ ସ୍ଥିର କର ।

4. ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀରେ 100 ଜଣ ଛାତ୍ରଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 40 ଜଣ କମ୍ପ୍ୟୁଟର ବିଜ୍ଞାନ ଓ 52 ଜଣ ପ୍ରାଣୀବିଜ୍ଞାନ ଅଧ୍ୟୟନ କରନ୍ତି । ଯଦି 23 ଜଣ ଛାତ୍ର ଉଭୟ ବିଷୟକୁ ଅଧ୍ୟୟନ କରୁଥା'ନ୍ତି ତେବେ କେତେଜଣ ଛାତ୍ର ଏହି ଦୁଇ ବିଷୟରୁ କୌଣସିଟିକୁ ଅଧ୍ୟୟନ କରନ୍ତି ନାହିଁ ସ୍ଥିର କର ।

5. ରାମଚନ୍ଦ୍ର ଉଚ୍ଚ ବିଦ୍ୟାଳୟର 80 ଜଣ ଛାତ୍ର ଗଣିତ ବା ବିଜ୍ଞାନରେ ପ୍ରଥମ ଶ୍ରେଣୀ ନମ୍ବର ରଖିଥିଲେ। ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 50 ଜଣ ଗଣିତରେ, 10 ଜଣ ଉଭୟ ଗଣିତ ଓ ବିଜ୍ଞାନରେ ପ୍ରଥମ ଶ୍ରେଣୀ ନମ୍ବର ପାଇଥିଲେ। ତେବେ କେତେଜଣ କେବଳ ବିଜ୍ଞାନରେ ପ୍ରଥମ ଶ୍ରେଣୀ ନମ୍ବର ପାଇଥିଲେ?

6. 200 ଜଣ ଲୋକ ଇଂରାଜୀ ବା ଓଡ଼ିଆରେ କଥାବାର୍ତ୍ତା କରିପାରନ୍ତି, ଯଦି 80 ଜଣ ଲୋକ କେବଳ ଓଡ଼ିଆ ଓ 70 ଜଣ ଲୋକ କେବଳ ଇଂରାଜୀରେ କଥା ହୋଇପାରନ୍ତି, ତେବେ କେତେଜଣ ଉଭୟ ଓଡ଼ିଆ ଓ ଇଂରାଜୀରେ କଥା ହୋଇପାରନ୍ତି?

7. 100 ଜଣ ଟିଭି ଦର୍ଶକଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 75 ଜଣ ଦୂରଦର୍ଶନ ଜାତୀୟ କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଓ 60 ଜଣ ବି.ବି.ସି. କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଦେଖିବାକୁ ପସନ୍ଦ କରନ୍ତି। ତେବେ କେତେଜଣ ଏ ଉଭୟ କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଦେଖିବାକୁ ପସନ୍ଦ କରନ୍ତି ? କେତେଜଣ କେବଳ ଦୂରଦର୍ଶନ ଜାତୀୟ କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମ ଦେଖିବାକୁ ପସନ୍ଦ କରନ୍ତି?

8. ଗୋଟିଏ ହଷ୍ଟେଲ୍‌ର 40 ଜଣ ପିଲାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 15 ଜଣ କେବଳ ହକି ଖେଳନ୍ତି ଓ 20 ଜଣ କେବଳ କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳନ୍ତି। ଯଦି ଏହି ପିଲାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ ସମସ୍ତେ ହକି କିମ୍ବା କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳୁ ଥାଆନ୍ତି, ତେବେ କେତେଜଣ ପିଲା ହକି ଓ କ୍ରିକେଟ୍ ଉଭୟ ଖେଳ ଖେଳନ୍ତି, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

9. 100 ଜଣ ଲୋକଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 18 ଜଣ କାର୍ କିମ୍ବା ସ୍କୁଟର ଚଳାଇବା ଜାଣିନାହାଁନ୍ତି; କିନ୍ତୁ 25 ଜଣ କାର୍ ଓ ସ୍କୁଟର ଉଭୟ ଚଳାଇବା ଜାଣିଛନ୍ତି। ଯଦି ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 55ଜଣ ସ୍କୁଟର ଚଳାଇବା ଜାଣିଥାଆନ୍ତି, ତେବେ କେତେଜଣ କାର୍ ଚଳାଇବା ଜାଣିଛନ୍ତି, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

10. ଏକ ଶ୍ରେଣୀର 50 ଜଣ ଛାତ୍ରୀଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 22 ଜଣ ଗୀତ ଶିଖନ୍ତି ଓ 22 ଜଣ ନାଚ ଶିଖନ୍ତି। ଏଥିମଧ୍ୟରୁ କେବଳ 5 ଜଣ ଛାତ୍ରୀ ଉଭୟ ଗୀତ ଓ ନାଚ ଶିଖନ୍ତି। ତେବେ କେତେଜଣ ଛାତ୍ରୀ ଗୀତ କିମ୍ବା ନାଚ କୌଣସିଟି ଶିଖନ୍ତି ନାହିଁ ଏବଂ କେତେଜଣ ଛାତ୍ରୀ ଏହି ଦୁଇଟି ମଧ୍ୟରୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଶିକ୍ଷା କରନ୍ତି, ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

11. ଗୋଟିଏ କଲୋନୀର ଦୁଇ ପଞ୍ଚମାଂଶ ପରିବାର 'ସମ୍ବାଦ' ଓ ତିନି ଚତୁର୍ଥାଂଶ ପରିବାର 'ସମାଜ' ପଢ଼ନ୍ତି। ଯଦି 50 ଟି ପରିବାର ଏଇ ଦୁଇଟି ସମ୍ବାଦପତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ପଢ଼ନ୍ତି ନାହିଁ ଏବଂ 125ଟି ପରିବାର ଉଭୟ ଖବରକାଗଜ ପଢ଼ନ୍ତି ତେବେ ଉକ୍ତ କଲୋନୀର ପରିବାର ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

12. 2 କିମ୍ବା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ 200 ଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ 140ଟି ଯୁଗ୍ମ ଓ 40ଟି 6 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ। ତେବେ କେତେ ଗୋଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଓ କେତେଗୋଟି ସଂଖ୍ୟା 3 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟ

ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା

(REAL NUMBER)

2.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ମାନବ ସଭ୍ୟତାର ଅଗ୍ରଗତିରେ ସଂଖ୍ୟା ଜଗତର ଭୂମିକା ସର୍ବଶ୍ରେଷ୍ଠ । ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ବ୍ୟବହାର ମଣିଷ କେବେ କରିଥିଲା, ତାହାର ଆଲୋଚନା ଅତି ଜଟିଳ । ଏତିକି ମାତ୍ର ଜାଣିବା ଦରକାର ଯେ, ଆବଶ୍ୟକତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସଂଖ୍ୟା ଜଗତର ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିଲା ଓ ସଂଖ୍ୟା ଜଗତ ବିନା ଆମର ଏ ସଭ୍ୟତାକୁ ପରିକଳ୍ପନା କରାଯାଇପାରିବ ନାହିଁ ।

ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ପ୍ରଥମେ ଆସିଥା'ନ୍ତି **ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (Counting Numbers) କିମ୍ବା ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (Natural Numbers)** । ଏଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ 1,2,3, 4, 5,... । ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍‌ର ସଂକେତ N ଓ ଏହାକୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ ଲେଖିବା N = {1, 2, 3, ...} ।

ଏହା ପରେ ଆସିଥା'ନ୍ତି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଏବଂ ସମସ୍ତ **ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା (Integers)** ମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌ର ସଂକେତ Z ଏବଂ Z = {...., –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, ...} । ଅର୍ଥାତ୍ ସମସ୍ତ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା, 0 (ଶୂନ) ଏବଂ ସମସ୍ତ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ସେଟ୍ । ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖଯୋଗ୍ୟ ଯେ N ସେଟ୍‌ରେ 0 (ଶୂନ) ଉପାଦାନଟିକୁ ନେଇ ବିଚାର କଲେ ଆମେ N* ସେଟ୍ ପାଇଥାଉ ଓ ଏହାକୁ **ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାସେଟ୍** N* କୁହାଯାଏ । ଉକ୍ତ ସେଟ୍‌କୁ ତାଲିକା ପ୍ରଣାଳୀରେ N* = {0, 1, 2, 3, ...} ଲେଖାଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଶୂନ (0) ଏବଂ ଋଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା (...–3, –2, –1) ପ୍ରାଚୀନ ଭାରତୀୟଙ୍କ ଅବଦାନ । ବ୍ରହ୍ମଗୁପ୍ତ (ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 598ରେ ଜନ୍ମ) ତାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଲିଖିତ 'ବ୍ରହ୍ମସିଦ୍ଧାନ୍ତ' ପୁସ୍ତକରେ ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା କଥା ଉଲ୍ଲେଖ କରିଛନ୍ତି ।

ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Z ର ସଂପ୍ରସାରଣ ହେତୁ ସମସ୍ତ **ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational Numbers)** ସେଟ୍‌ର ସୃଷ୍ଟି । ଯେକୌଣସି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $\frac{p}{q}$ ଅଟେ, ଯେଉଁଠାରେ p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ $q \neq 0$ । ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ସଂକେତ Q ଅଟେ ଏବଂ $Q = \left\{ \frac{p}{q} : p \text{ ଓ } q \text{ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ } q \neq 0 \right\}$ ।

ଯେକୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସୃଷ୍ଟି ବହୁ ପୁରାତନ । ଏହାର ଉଦ୍ଭାବନ ସମ୍ଭବତଃ ଖ୍ରୀଷ୍ଟପୂର୍ବ 3000-2000 ମସିହାର ଘଟଣା ।

ଏଠାରେ ମନେ ରଖିବା ଉଚିତ୍ ଯେ, $N \subset N^* \subset Z \subset Q$

N ସେଟ୍, Z ସେଟ୍ ଓ Q ସେଟ୍‌ର ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ଉପାଦାନ x ଓ y ନେଇ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଯୋଗ(ମିଶାଣ) ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କିପରି କରାଯାଏ ତାହା ଆମେ ଜାଣିଛେ । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାମାନଙ୍କୁ ଯଥାକ୍ରମେ + ଓ x ଲେଖି ସୂଚାଯାଏ । ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀର ସରଳ ଗଣିତ (ବୀଜଗଣିତ) ପୁସ୍ତକରେ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦୁଇଗୋଟିର ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମ (algebraic properties) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି । Q ସେଟ୍‌ର ପୁନଃ ସମ୍ପ୍ରସାରଣ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ସେହି ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ମରଣ କରିବା ଉଚିତ୍ ।

2.2 N ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମ

ପ୍ରଥମେ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ N ର ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକୁ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଏଠାରେ ବ୍ୟବହୃତ ସଂକେତ m, n ଓ p ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ $m, n, p \in N$

ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଧର୍ମ :

1. ***ସଂବୃତ୍ତି ଧର୍ମ*** (Closure property) : $m + n \in N$ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

2. ***କ୍ରମବିନିମୟୀ ଧର୍ମ*** (Commutative property) : $m + n = n + m$

3. ***ସହଯୋଗୀ ଧର୍ମ*** (Associative property) : $m + (n + p) = (m + n) + p$

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଧର୍ମ :

4. ***ସଂବୃତ୍ତି ଧର୍ମ*** : $m\,n \in N$ ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।
(m x n କିମ୍ବା m.n କୁ mn ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ ।)

5. ***କ୍ରମ ବିନିମୟୀ ଧର୍ମ*** : $mn = nm$

6. ***ସହଯୋଗୀ ଧର୍ମ*** : $m(np) = (mn)p$

7. ***ଅଭେଦ ଧର୍ମ*** (Identity property) : ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାରେ ସଂଖ୍ୟା 1 (ଏକ) ଅଭେଦ ଓ $m.1 = m$ ।

1 କୁ ମଧ୍ୟ ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ (Multiplicative Identity) କୁହାଯାଏ ।

8. ***ବଣ୍ଟନ ଧର୍ମ*** (distributive property) : $m(n+p)= mn+mp$ ଅର୍ଥାତ୍ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରିଥାଏ ।

ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାରେ କ୍ରମ (Order) :

N ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିତ (ordered) । ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା m ଓ n ଦିଆଗଲେ କେଉଁଟି ବଡ଼ ଓ କେଉଁଟି ସାନ କହିବା ସମ୍ଭବ । n ଅପେକ୍ଷା m ବଡ଼ ହେଲେ $m > n$ କିମ୍ବା $n < m$ ବୋଲି ଲେଖାଯାଏ । ବସ୍ତୁତଃ

$$1 < 2 < 3 < 4 < ... $$ ।

N ସେଟ୍ ପରିବର୍ତ୍ତେ N* ସେଟ୍ (ସଂପ୍ରସାରିତ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍) ନେଲେ ଉପରଲିଖିତ ସମସ୍ତ ଧର୍ମ ବ୍ୟତୀତ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଧର୍ମଟି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ହେବ ।

ଯୋଗର ଅଭେଦ ଧର୍ମ : ଯେକୌଣସି ଉପାଦାନ $m \in N^*$ ହେଲେ $0+m = m$ ।

0 (ଶୂନ)କୁ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ (Additive Identity) କୁହାଯାଏ ।

N* ସେଟ୍‌ରେ ସିଦ୍ଧ ହେଉଥିବା ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ସମସ୍ତ ଧର୍ମ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Z ରେ ସତ୍ୟ ଅଟନ୍ତି । ଏତଦ୍‌ବ୍ୟତୀତ ଆଉ ଗୋଟିଏ ଧର୍ମ ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ହୋଇଥାଏ । ତାହା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ବିଲୋମୀ ଧର୍ମ (Inverse property) : ଯେକୌଣସି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା m ପାଇଁ ଏହାର ବିଲୋମୀ (inverse) ଟି $-m$ ଓ $-m \in Z$ ଏବଂ $m + (-m) = 0 = (-m) + m$ ।

m ଓ $-m$ ପରସ୍ପରର ବିଲୋମୀ ଅଟନ୍ତି ।

ସଂଖ୍ୟା 0 ର ବିଲୋମୀ -0 ଓ $-0 = 0$

Z ସେଟ୍‌ଟି ମଧ୍ୟ କ୍ରମିତ ଅର୍ଥାତ୍ $\ldots -4 < -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < 3 < \ldots$

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ N କିମ୍ବା N* ସେଟ୍‌ରେ ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ ଅସମ୍ଭବ । ମାତ୍ର Z ସେଟ୍‌ର ସୃଷ୍ଟି ହେତୁ ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟିର ସଂଜ୍ଞା ପ୍ରକରଣ ସମ୍ଭବ ହୋଇ ପାରିଲା ।

ମନେରଖ ଯେ, ଦୁଇଗୋଟି ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାର ବିୟୋଗଫଳ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା । ତେଣୁ ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି Z ସେଟ୍‌ରେ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରେ; ମାତ୍ର ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହଯୋଗୀ କିମ୍ବା କ୍ରମ ବିନିମୟୀ ନୁହେଁ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ।

(i) $-(-m) = m$ (ii) $(-m)(-n) = mn$ (iii) $0 \times m = m \times 0 = 0$

କେତେକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଧାରଣା :

(a) **ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ପଦ୍ଧତି (Euclidean algorithm) :** ଯଦି ମୋ ପାଖରେ 6 ଟି ପେନ୍‌ସିଲ୍ ଅଛି ଓ ଏହାକୁ 3 ଜଣ ପିଲାଙ୍କୁ ବାଣ୍ଟିବାକୁ ହେବ ତେବେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପିଲାକୁ 2 ଟି କରି ପେନ୍‌ସିଲ ଦେଇ ହେବ । କାରଣ $3 \times 2 = 6$ । ମାତ୍ର ଯଦି ମୋ ପାଖରେ 10 ଟି ପେନ୍‌ସିଲ୍ ଅଛି ତେବେ ଜଣକୁ ତିନୋଟି କରି ଦେଇ ଦେଲା ପରେ ଆଉ ଗୋଟିଏ ବଳକା ରହିବ । କାରଣ $10 = 3 \times 3 + 1$ । ଏହି ଧାରଣା ହିଁ ଇୟୁକ୍ଲିଡ଼ୀୟ ପଦ୍ଧତି । ଏହା ବ୍ୟାପକ ରୂପେ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ହେଲା ।

$p > 1$ ଏକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଓ n ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $n = mp + r$

ଯେଉଁଠାରେ m ଓ r ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ $0 \le r < p$ । $n = mp + r$ ପରିପ୍ରକାଶଟି ଅନନ୍ୟ (ଅର୍ଥାତ୍ ଏପରି ଏକାଧିକ ପରିପ୍ରକାଶ ନାହିଁ) । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $p = 4, n = 11$ ହେଲେ $11 = 2 \times 4 + 3$ ଓ ଏଠାରେ $m = 2, r = 3$ । ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ n ଭାଜ୍ୟ (devidend) , p ଭାଜକ (divisor), m ଭାଗଫଳ (quotient) ଓ r ଭାଗଶେଷ (remainder କିମ୍ବା residue) । ଅର୍ଥାତ୍ **ଭାଜ୍ୟ = (ଭାଜକ) x (ଭାଗଫଳ) + ଭାଗଶେଷ ।**

ଏହି ପଦ୍ଧତିରୁ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା (division) ର ସୃଷ୍ଟି । ଯଦି $r = 0$ (ଭାଗଶେଷ = 0) ତେବେ ଆମେ କହିଥାଉ n ସଂଖ୍ୟାଟି p ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ।

(b) **ଯୁଗ୍ମ ଓ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା (Even and Odd Numbers) :**

ଯେଉଁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ସେଗୁଡ଼ିକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା । 0, ± 2, ± 4, ± 6 ... ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା [± 2 ର ଅର୍ଥ 2 କିମ୍ବା –2] । ଯେଉଁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ 2 ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ନୁହଁନ୍ତି ସେଗୁଡ଼ିକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଓ । ± 1, ± 3, ± 5.... ଇତ୍ୟାଦି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

ଗୋଟିଏ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାକୁ 2m, $(m \in Z)$ ଓ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାକୁ 2m+1, $(m \in Z)$ ଆକାରରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ । ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟା ପରସ୍ପର ମୌଳିକ (relatively prime) ଯଦି ସେମାନଙ୍କ ଗ.ସା.ଗୁ. 1 । ଅର୍ଥାତ୍ m ଓ n ପରସ୍ପର ମୌଳିକ ଯଦି (m, n) = 1 । 2, 3; 5, 8; 8, 9 ଆଦି ପରସ୍ପର ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାଯୋଡ଼ା ଅଟନ୍ତି ।

(c) **ମୌଳିକ ଓ ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟା (Prime & Composite Numbers) :**

1 ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଏକ ସ୍ୱାଭବିକ ସଂଖ୍ୟା p କେବଳ 1 ଓ p ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ହେଉଥିଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ ଏକଠାରୁ ବୃହତ୍ତର ସ୍ୱାଭବିକ ସଂଖ୍ୟାଟି ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଯଦି ଏହାର 1 ଓ ସେହିସଂଖ୍ୟା ଭିନ୍ନ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ଉତ୍ପାଦକ ନ ଥିବ ।

2, 3, 5, 7, 11, 13,17, 19, 23... ଇତ୍ୟାଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ (1) : ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ସେ ନିଜେ ଓ 1 ଉତ୍ପାଦକଦ୍ୱୟ ରହିଲେ ଏହି ଦୁଇଗୋଟି ଉତ୍ପାଦକଙ୍କୁ ନଗଣ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ (Trivial factors) କୁହାଯାଏ ।

ମାତ୍ର ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡିକର ଏହି ନଗଣ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ ବ୍ୟତୀତ ଗଣ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ (Non - trivial factors) ମଧ୍ୟ ଥାଏ । ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡିକର କେବଳ ନଗଣ୍ୟ ଉତ୍ପାଦକ ଥାଏ । କିନ୍ତୁ ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ନଗଣ୍ୟ ଏବଂ ଗଣ୍ୟ ଉଭୟ ପ୍ରକାର ଉତ୍ପାଦକ ଥାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ (2) : ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖାଯାଇଛି ଯେ, 1 ରୁ 1000 ମଧ୍ୟରେ 168 ଟି, 1000 ରୁ 2000 ମଧ୍ୟରେ 135ଟି, 2000 ରୁ 3000 ମଧ୍ୟରେ 127 ଟି, 3000 ରୁ 4000 ମଧ୍ୟରେ 120 ଟି ଓ 4000 ରୁ 5000 ମଧ୍ୟରେ 119ଟି ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଅଛି । ପ୍ରକୃତରେ **ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଅସୀମ ।**

ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା (1 ଭିନ୍ନ), ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଅଥବା ଏହାକୁ କେତେକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

ଯଥା : 6 = 2 x 3, 24 = 2 x 2 x 2 x 3, 94860 = 2 x 2 x 3 x 3 x 5 x 17 x 31 ଇତ୍ୟାଦି ।

ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାର ଏହି ପ୍ରକାର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଅନନ୍ୟ (Unique) ; ଅର୍ଥାତ୍ କୌଣସି ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଦୁଇପ୍ରକାର ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଉତ୍ପାଦକର ଗୁଣଫଳରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇ ନପାରେ । ଅବଶ୍ୟ କ୍ରମରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରାଯାଇପାରେ; ଯଥା : 6 = 2 x 3 = 3 x 2 । ଏହି ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନ ଉପପାଦ୍ୟରେ ଲିପିବଦ୍ଧ ଯାହାକି **Fundamental Theorem of Arithmetic** ବା **Unique Factorisation Theorem** ନାମରେ ଅଭିହିତ ।

1 ଭିନ୍ନ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଅନନ୍ୟ ଭାବରେ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରେ ।

ମନେରଖ - 1 ଗୋଟିଏ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ ।

ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟାର ମୌଳିକ ରାଶିମାନଙ୍କର ଉତ୍ପାଦକିକୃତ ରୂପକୁ **ଷ୍ଟାଣ୍ଡାର୍ଡ (standard)** ବା **କାନୋନିକାଲ୍ (Canonical)** ରୂପ କୁହାଯାଏ ।

2.3 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational numbers) :

ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀର ସରଳ ଗଣିତ (ବୀଜଗଣିତ) ପୁସ୍ତକର ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟରେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥିଲା । ସ୍ମରଣ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ ଯେ, ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $\frac{p}{q}$ ଯେଉଁଠାରେ p ଓ q ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ $q \neq 0$ । $\frac{1}{2}, \frac{-3}{7}, \frac{-1}{-4}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ୱାଭାବିକ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା n ମଧ୍ୟ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କାରଣ ଏହାକୁ $\frac{n}{1}$ ରୂପେ ଲେଖି ହେବ ।

ତେଣୁ ଆମେ ପାଇବା, $N \subset Z \subset Q$

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ନେଇ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା :

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଆଲୋଚନାରେ $x, y \in Q$ (ଅର୍ଥାତ୍ x ଓ y ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା) । ସୁତରାଂ

$x = \frac{p}{q}$ ଓ $y = \frac{r}{s}$; ($p, q, r, s \in Z$ ଓ $q \neq 0, s \neq 0$)

ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା : $x + y = \frac{p}{q} + \frac{r}{s} = \frac{ps+qr}{qs} \in Q$;

ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା : $x - y = \frac{p}{q} - \frac{r}{s} = \frac{ps-qr}{qs} \in Q$;

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା : $x \times y = \frac{p}{q} \times \frac{r}{s} = \frac{pr}{qs} \in Q$;

ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା : ଯଦି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା $y \neq 0$, ଅର୍ଥାତ୍ $r \neq 0$ ତେବେ $\frac{x}{y} = \frac{\frac{p}{q}}{\frac{r}{s}} = \frac{ps}{qr} \in Q$ ।

ଅତଏବ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q କୁ ବିଚାର କଲେ ଚାରିଟିଯାକ ପ୍ରକ୍ରିୟା (ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ହରଣ) ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରନ୍ତି । କେବଳ ହରଣ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଜକ ଭାବେ ରହିଥିବା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱୟ ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ବୀଜଗାଣିତିକ ନିୟମଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ । ଏଠାରେ $x, y, z \in Q$

ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ନିୟମ :

(i) ***ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ*** : $x + y \in Q$

(ii) ***କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ*** : $x + y = y + x$

(iii) ***ସହଯୋଗୀ ନିୟମ*** : $x + (y + z) = (x + y) + z$

(iv) ***ଅଭେଦ ନିୟମ*** : $x + 0 = x$ ('0' କୁ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ କୁହାଯାଏ ।)

(v) ***ବିଲୋମୀ ନିୟମ*** : $x + (-x) = 0$ (x ଓ –x ପରସ୍ପରର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।)

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ନିୟମ :

(vi) ***ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ*** : $xy \in Q$

(vii) ***କ୍ରମବିନିମୟୀ ନିୟମ*** : $xy = yx$

(viii) ***ସହଯୋଗୀ ନିୟମ*** : $x(yz) = (xy)z$

(ix) ***ଅଭେଦ ନିୟମ*** : $x.1 = x$ (1 କୁ ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ କୁହାଯାଏ ।)

(x) ***ବିଲୋମୀ ନିୟମ*** : $x(x \neq 0)$ ର ବିଲୋମୀ $\frac{1}{x}$ (କିମ୍ବା x^{-1}) ଓ $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

(x ଓ $\frac{1}{x}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରସ୍ପରର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।)

ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାଦ୍ୱୟର ନିୟମ :

(xi) **ବଣ୍ଟନ ନିୟମ** : $x(y + z) = xy + xz$,

ଯେଉଁ ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନ ଗୁଡ଼ିକ ଉପରୋକ୍ତ ଯୋଗାତ୍ମକ, ଗୁଣନାତ୍ମକ ତଥା ବଣ୍ଟନ ନିୟମ ପାଳନ କରୁଥିବେ ସେହି ସେଟ୍‌କୁ ଗୋଟିଏ ଫିଲ୍‌ଡ (Field) କୁହାଯାଏ ।

ଏ ସମସ୍ତ ସତ୍ୟ ହେତୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ଏକ ଫିଲଡ୍ (field) ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ (i) : Q ସେଟ୍‌ରେ ଗୁଣନର ବିଲୋମୀ ନିୟମ ସତ୍ୟ; ମାତ୍ର ଏହା Z ସେଟ୍‌ରେ ସତ୍ୟ ହେଉ ନ ଥିଲା ।

(ii) : $a + a + a + ...$(n ଥର) $= na$ ଓ $a \times a \times a \times .....$ (n ଥର) $= a^n$

'a^n' ସଂକେତକୁ ପ୍ରଥମେ **ଫରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ Rene Descartes** ବ୍ୟବହାର କରିଥିଲେ ।

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ କ୍ରମିତ (Ordered) । ଦୁଇଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା x ଓ y ଦିଆଯାଇ ଥିଲେ ତୁଳନା କରି କହି ହେବ (i) $x>y$ କିମ୍ବା (ii) $x < y$ କିମ୍ବା $x = y$ । ଏହାକୁ **ତ୍ରିମୁଖୀ ନିୟମ** (trichotomy law) କୁହାଯାଏ ।

ମନେକର $x = \frac{p}{q}$ ଓ $y = \frac{r}{s}$; $p, q, r, s \in Z$ ଓ $q \neq 0$ ଓ $s \neq 0$ । x ଓ yର ବିୟୋଗଫଳ ନିରୂପଣ କରି ତ୍ରିମୁଖୀ ନିୟମକୁ ପରୀକ୍ଷା କରିବା ସହଜ । ଏଠାରେ ଆମେ q ଓ s କୁ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ରୂପେ ନେଉଛେ ।

ଅସମାନତା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିମ୍ନସ୍ଥ ନିୟମଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର –

(i) $x < y$ ବା $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି $ps < qr$ ଅଥବା $ps - qr < 0$

(ii) $x > y$ ବା $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ ଯଦି ଓ କେବଳ ଯଦି $ps > qr$ ଅଥବା $ps - qr > 0$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $\frac{1}{6} - \frac{3}{7} = \frac{7-18}{42} = -\frac{11}{42} < 0;$ $\quad \therefore \frac{1}{6} < \frac{3}{7}$

$$-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6} > 0; \qquad \therefore -\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$$

ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ଅଟନ୍ତି ଯେଉଁ ଠାରେ $x, y, z \in Q$

(a) $x < y$ ଓ $y < z$ ହେଲେ, $x < z$, ଏହା **ସଂକ୍ରମୀ ନିୟମ** (law of transitivity)

(b) $x < y$ ହେଲେ, $x + z < y + z$,

(c) $x < y$ ଓ $z > 0$ ହେଲେ, $xz < yz$,

(d) $x < y$ ଓ $z < 0$ ହେଲେ, $xz > yz$,

(e) $0 < x < y$ ହେଲେ $\frac{1}{x} > \frac{1}{y}$ ଓ $y < x < 0$ ହେଲେ, $\frac{1}{y} > \frac{1}{x}$ ।

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଘନତ୍ୱ (Density)

ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର କ୍ରମ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରି ଆମେ ପ୍ରମାଣ କରିପାରିବା ଯେ,

ଯେକୌଣସି ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ- 1 : a ଓ b ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ $a < b$ । ହେଲେ $a < \frac{a+b}{2} < b$ ।

ସମାଧାନ : $a < b \Rightarrow a + a < a + b$

$\Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow \frac{1}{2} \times 2a < \frac{1}{2}(a+b)$

$\Rightarrow a < \frac{a+b}{2}$ .... (1)

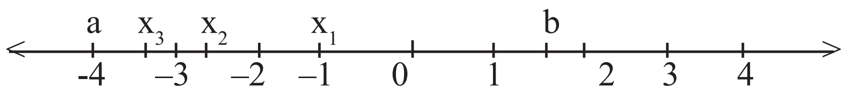
ପୁନଶ୍ଚ $a < b \Rightarrow a + b < b + b \Rightarrow a + b < 2b \Rightarrow \frac{1}{2}(a+b) < \frac{1}{2} \times 2b$

$\Rightarrow \frac{a+b}{2} < b$ .... (2)

(1) ଓ (2) ରୁ ପାଇଲେ $a < \frac{a+b}{2} < b$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଏହି ପଦ୍ଧତିକୁ ବାରମ୍ବାର ପ୍ରୟୋଗ କଲେ, a ଓ b ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ଅସଂଖ୍ୟ ସଂଖ୍ୟା ମିଳିବ । ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ବର୍ଣ୍ଣିତ a ଓ b ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ କେତେକ ସଂଖ୍ୟା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

$x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = \frac{a+x_1}{2}$, $x_3 = \frac{a+x_2}{2}$ ..... ନିମ୍ନରେ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



(ଚିତ୍ର 2.1)

ମନେକର x ଓ y ଦୁଇଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ $x < y$ । x ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଓ y ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର ସଂଖ୍ୟାଟି $\frac{1}{2}(x+y) = z_1$; ସେହିପରି $\frac{1}{2}(x+z_1) = z_2$ ଓ $\frac{1}{2}(z_1+y) = z_3$ ମଧ୍ୟରେ x ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଓ y ଅପେକ୍ଷା କ୍ଷୁଦ୍ରତର

ଆଉ ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ଏହି ସଂଖ୍ୟା z_1, z_2, z_3 .. ଇତ୍ୟାଦିଙ୍କୁ x ଓ y ମଧ୍ୟସ୍ଥ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କୁହାଯାଏ । ଏହି ପଦ୍ଧତିକୁ ବାରମ୍ବାର ପ୍ରୟୋଗ କରି ଚାଲିଲେ ଆମେ ଦେଖିବା ଯେ, x ଓ y ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବିଦ୍ୟମାନ । ଏହି ଧର୍ମକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ର ଘନତ୍ୱ କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରିବାର କଥା ଯେ $x < z_1 < y$, $x < z_2 < y$ ଇତ୍ୟାଦି । ଏହା ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି ।

$x < y$ ହେତୁ $y - x > 0$; $z_1 - x = \frac{x+y}{2} - x = \frac{y-x}{2} > 0$ । ($\because z_1 = \frac{x+y}{2}$)

ସୁତରାଂ $z_1 > x$;

ସେହିପରି $y - z_1 = y - \frac{x+y}{2} = \frac{y-x}{2} > 0$ । ସୁତରାଂ $y > z_1$ ଅର୍ଥାତ୍ $x < z_1 < y$;

ସେହିପରି ଦର୍ଶାଯାଇପାରେ ଯେ $x < z_2 < z_1 < y$ ଓ $x < z_1 < z_3 < y$ ।

ଉଦାହରଣ- 2 : -1 ଓ 1 ମଧ୍ୟରେ ତିନିଗୋଟି ଋଣାତ୍ମକ ଓ ଦୁଇ ଗୋଟି ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଋଣାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ $x = -1$ ଓ $y = 0$ ନିଆଯାଉ । ($\because$ ଏଠାରେ $-1 < 0 < 1$)

$\therefore\ z_1 = \frac{x+y}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{x+z_1}{2} = \frac{-1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{2} = \frac{-\frac{3}{2}}{2} = -\frac{3}{4}$ ଓ

$z_3 = \frac{z_1+y}{2} = \frac{-\frac{1}{2}+0}{2} = -\frac{1}{4}$ ।

ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ $x = 0$ ଓ $y = 1$ ନିଆଯାଉ ।

$\therefore\ z_1 = \frac{x+y}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, $z_2 = \frac{x+z_1}{2} = \frac{0+\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$ ।

ସୁତରାଂ -1 ଓ 1 ମଧ୍ୟରେ ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ତ୍ରୟ $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}$ ଓ $-\frac{1}{4}$ ଏବଂ ଧନାତ୍ମକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ ।

ଉଦାହରଣ- 3 : $\frac{1}{3}$ ଓ $\frac{4}{9}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ତିନୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{1}{3}$ ଓ $\frac{4}{9}$ ର ମଧ୍ୟବର୍ତ୍ତୀ ସଂଖ୍ୟା ତିନୋଟି ହେଲେ -

$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3+4}{9}\right) = \frac{7}{18}$, $x_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{7}{18}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{6+7}{18}\right) = \frac{13}{36}$

ଓ $x_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{13}{36}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{12+13}{36}\right) = \frac{25}{72}$

$\therefore$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାତ୍ରୟ ହେଲେ $\frac{7}{18}, \frac{13}{36}$ ଓ $\frac{25}{72}$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : x ଓ y ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $(x \pm y)^2$, $(x \pm y)^3$, $x^2 - y^2$, $x^3 \pm y^3$ ସଂକ୍ରାନ୍ତୀୟ ସମସ୍ତ ସୂତ୍ର ସତ୍ୟ ଅଟନ୍ତି । ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ଏହି ସୂତ୍ର ଗୁଡ଼ିକୁ ସାବ୍ୟସ୍ତ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ

$x^2 + 2xy + y^2 = x.x + xy + xy + yy$

$= x(x+y)+(x+y)y=x(x+y) + y\ (x+y)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= (x + y)\ (x + y) = (x + y)^2$ (ସଂଜ୍ଞା) । (ପ୍ରମାଣିତ)

2.4 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପ :

ମନେକର $x = \frac{p}{q}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା $q > 0$ । p କୁ ଲବ ଓ q କୁ ହର କୁହାଯାଏ । p କୁ q ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟିର ପରିସମାପ୍ତି ଘଟେ ଓ ଆଉ କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି କେବେ ହେଲେ ବି ଘଟେ ନାହିଁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,

(i) $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{1}{4} = 0.25$, $\frac{1}{5} = 0.2$, $\frac{3}{25} = 0.12$ ଇତ୍ୟାଦି; ଯେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି ଘଟିଥାଏ ।

(ii) $\frac{1}{3} = 0.33333....$, $\frac{1}{7} = 0.14285714285714$, $\frac{5}{6} = 0.83333.........$ ଇତ୍ୟାଦି; ଯେଉଁ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଭାଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟିର ପରିସମାପ୍ତି ଜମା ଘଟେ ନାହିଁ ।

ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦଶମିକ ରୂପଟି ସସୀମ ବା **ସରନ୍ତି (terminating)** କିନ୍ତୁ ଦ୍ୱିତୀୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏହା ଅସୀମ ବା **ଅସରନ୍ତି (non-terminating)** ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ।

ଯେଉଁ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଗୋଟିଏ ଅଙ୍କ ବା ଏକାଧିକ ଅଙ୍କମାନ ବାରମ୍ବାର କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଆବିର୍ଭାବ ହୁଏ ତାହାକୁ **ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା (Recurring Decimals)** କୁହାଯାଏ ।

ଯଥା : $0.3333.... = 0.\overline{3}$, $0.14285714285714... = 0.\overline{142857}$, $0.8333.... = 0.8\overline{3}$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, ପୁନରାବୃତ୍ତି ହେଉଥିବା ଅଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ଥରେ ମାତ୍ର ଲେଖି ଏହା ଉପରେ ଗୋଟିଏ ଗାର ଦେଇ ପୁନରାବୃତ୍ତିକୁ ସୂଚାଯାଇଛି ।

ମନେରଖ : ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ରୂପରେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇପାରେ ଯଥା :

ସସୀମ ଦଶମିକ (terminating decimals) ରୂପ ଏବଂ

ଅସୀମ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ (non-terminating and recurring decimals) ରୂପ ।

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଜଣାପଡ଼େ ଯେ, **ପ୍ରତ୍ୟେକ ସସୀମ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅସୀମ ଅଥଚ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଟନ୍ତି ।**

ଉପରୋକ୍ତ ଦୁଇ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ରୂପ ଭିନ୍ନ

(iii) $0.101001000100001.....$, $-1.21221222122221...$ ଇତ୍ୟାଦି

ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଅସୀମ (non-terminating) କିନ୍ତୁ ପୌନଃପୁନିକ ନୁହଁନ୍ତି । ତେଣୁ ଏଗୁଡ଼ିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନୁହଁନ୍ତି ।

ବି.ଦ୍ର.: ଯେକୌଣସି ସସୀମ ଦଶମିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଅସୀମ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାରେ ପରିଣତ କରାଯାଇପାରେ । ଯଥା: $0.5 = 0.5000....$, $0.31 = 0.310000....$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ଦଶମିକ ରୂପରୁ ପରିମେୟ ରୂପକୁ ପରିବର୍ତ୍ତନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଦେଖ ।

ଉଦାହରଣ - 4 : (i) 0.58 (ii) $5.\overline{7}$ (iii) $1.\overline{32}$ (iv) $0.7\overline{12}$ ର ପରିମେୟ ରୂପ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : (i) 0.58 ସସୀମ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା । $\therefore 0.58 = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$ (ଉତ୍ତର)

(ii), (iii) ଓ (iv) ପ୍ରଶ୍ନରେ ଥିବା ଦଶମିକ ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ଅସୀମ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ।

(ii) ମନେକର $x = 5.\overline{7} = 5.7777....$ $\Rightarrow 10x = 57.7777....$

ସୁତରାଂ $10x - x = (57.7777.....) - (5.7777.....)$

$\Rightarrow 9x = 52 \Rightarrow x = \frac{52}{9}$ । (ଉତ୍ତର)

(iii) ମନେକର $x = 1.\overline{32} = 1.323232.....$

$\Rightarrow 100x = 132.323232......$

$\therefore 100x - x = (132.323232.....) - (1.323232.....)$

$\Rightarrow 99x = 131 \Rightarrow x = \frac{131}{99}$ । (ଉତ୍ତର)

(iv) ମନେକର $x = 0.7\overline{12} = 0.7121212....$

$\Rightarrow 10x = 7.121212......$ $\Rightarrow 1000x = 712.121212......$

$\therefore 1000x - 10x = (712.121212.....) - (7.121212.....)$

$\Rightarrow 990x = 705 \Rightarrow x = \frac{705}{990} = \frac{141}{198}$ । (ଉତ୍ତର)

($1000x - 100x$, $100x - 10x$ ବା $100x - x$ ଦ୍ଵାରା 'x' ର ମାନ କାହିଁକି ନିରୂପଣ ନ ହୋଇପାରିବ ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ସସୀମ ଦଶମକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଅସୀମ ଓ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରୂପରେ ପରିଣତ କରିହେବ ।

ଏହାର ବିପରୀତ ଉକ୍ତିଟି ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସସୀମ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାରେ ବା ଅସୀମ ଓ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମକ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 5 : ସରଳ କର : $(1.1\overline{9})^2 + 2 \times 1.1\overline{9} \times 1.7\overline{9} + (1.7\overline{9})^2$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶରେ $1.1\overline{9} = 1.2$, $1.7\overline{9} = 1.8$ । (ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶ $= (1.2)^2 + 2 \times 1.2 \times 1.8 + (1.8)^2 = (1.2 + 1.8)^2 = 3^2 = 9$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2 (a)

1. ଭୁଲ୍ ଥିଲେ (F) ଓ ଠିକ୍ ଥିଲେ (T) ଲେଖ ।

(i) –1 ଦ୍ୱାରା –201 ବିଭାଜ୍ୟ (ii) 1 ଦ୍ୱାରା 0 ବିଭାଜ୍ୟ (iii) 0 ଦ୍ୱାରା 5 ବିଭାଜ୍ୟ

(iv) ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ପରିମେୟ ନୁହେଁ (v) $-5 < -3$ (vi) $0.\bar{9}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା

(vii) 0 ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା (viii) $-\frac{1}{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା

(ix) $a, b \in N$ ହେଲେ $ab \in N$ (x) $a, b \in N$ ହେଲେ $a - b \in N$

(xii) $a, b \in N$ ହେଲେ $a - b \in Z$ (xii) $a, b \in Z$ ହେଲେ $\frac{a}{b} \in Q$

2. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) $\frac{1}{2}$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ..... (ii) –7 ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ....

(iii) .... ତା' ନିଜର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ (iv) .... ତା' ନିଜର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।

(v) ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ ..... (vi) ଯୁଗ୍ମ ଓ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ...

(vii) .... ଏକମାତ୍ର ଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଅଟେ । (viii) ସର୍ବନିମ୍ନ ଅଯୁଗ୍ମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାଟି ... ଅଟେ ।

(ix) ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା .... ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ବଣ୍ଟନ କରେ ।

(x) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଦୁଇଟି ପରସ୍ପର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଉପାଦାନକୁ ମିଶାଇଲେ ଫଳ ..... ଅଟେ ।

(xi) $N \cap N^* =$ .... (xii) Z ସେଟ୍‌ରେ –1 ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ......

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରଶ୍ନ ପାଇଁ ପ୍ରଦତ୍ତ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତରରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟିକୁ ବାଛ ।

(i) $n, m \in Z$ ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଅସତ୍ୟ ?

(a) $m + n \in Z$, (b) $m - n \in Z$ (c) $m \times n \in Z$ (d) $n . m \in Z$

(ii) Z ସେଟ୍‌ରେ କେଉଁଟି ସତ୍ୟ ?

(a) ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ 0 (b) ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ 1

(c) ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ 0 (d) ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ (–1)

(iii) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସତ୍ୟ ?

(a) ସବୁଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାଟି 3 (b) ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ଅଯୁଗ୍ମ

(c) ଦୁଇଟି ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଅଯୁଗ୍ମ (d) ଦୁଇଟି ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ମୌଳିକ

(iv) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସତ୍ୟ ?

(a) $x < y$ ଓ $y < z$ ହେଲେ $x < z$ ।

(b) $x < y$ ଓ $z \in Q$ ହେଲେ $xz < yz$ ।

(c) $x < y$ ଓ $z \in Q$ ହେଲେ $x + z < y + z$ ନ ହୋଇ ପାରେ ।

(d) ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ସସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ପରିମେୟ ବିଦ୍ୟମାନ ।

(v) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଠିକ୍ ?

(a) 0.9999.......... < 1.0

(b) $\frac{1}{5}$ ର ଦଶମିକ ପରିପ୍ରକାଶଟି 0.19999.......

(c) $\frac{1}{3}$ ର ଦଶମିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଅସରନ୍ତି ନୁହେଁ ।

(d) n ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $\frac{1}{n}$ ର ଦଶମିକ ପରିପ୍ରକାଶ ସର୍ବଦା ପୌନଃପୁନିକ ।

(vi) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$ ମଧ୍ୟରେ ବୃହତ୍ତମ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କେଉଁଟି ?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{7}$

(vii) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}$ ମଧ୍ୟରେ କ୍ଷୁଦ୍ରତ୍ତମ ସଂଖ୍ୟା କେଉଁଟି ?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{5}$ (d) $\frac{4}{7}$

(viii) 1 ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ କେଉଁଟି ?

(a) 1 (b) 0 (c) –1 (d) ଏଥିରୁ କୌଣସିଟି ନୁହେଁ

(ix) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଉକ୍ତିଟି ଅସତ୍ୟ ?

(a) p ଓ q ମୌଳିକ ହେଲେ ସେମାନଙ୍କର ଗ.ସା.ଗୁ. = 1 ।

(b) p ଓ q ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $p + q + pq$ ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ।

(c) p ଓ q ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $p + q$ ମଧ୍ୟ ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ।

(d) p ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଓ q ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ pq ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ।

4. ପ୍ରତି ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଯୌଗିକ ଅଟେ କି ? କାରଣ ସହ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

5. କେଉଁ କେଉଁ ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Z ରେ ସତ୍ୟ, ମାତ୍ର ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ସତ୍ୟ ନୁହେଁ ସେଗୁଡ଼ିକ ଲେଖ ।

6. କେଉଁ କେଉଁ ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ରେ ସତ୍ୟ, ମାତ୍ର ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଅସତ୍ୟ ସେଗୁଡ଼ିକ ଲେଖ ।

7. x ଓ y ଅଯୁଗ୍ମ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, xy ଅଯୁଗ୍ମ ମାତ୍ର x + y ଯୁଗ୍ମ ।

8. ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାମାନେ ଯୋଗ ଜନିତ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ ପାଳନ କରନ୍ତି କି ? କାରଣ ସହ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

9. 15 ଅପେକ୍ଷା ବୃହତ୍ତର ଓ 100 ଠାରୁ କ୍ଷୁଦ୍ରତର ଯେଉଁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକର ସାଧାରଣ ରୂପ $3n^2+2,\ n \in Z$ ସେଗୁଡ଼ିକ ଲେଖ ।

10. 0.123 123 123 .... ସଂଖ୍ୟାଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ କି ? କାରଣ ସହ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

11. 0.131ସଂଖ୍ୟାକୁ $\frac{p}{q}$ ପରିମେୟ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

12. $\frac{1}{3}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଅସରନ୍ତି ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ରୂପେ ଲେଖ ।

13. $\frac{1}{3}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଲଘିଷ୍ଠାକୃତି ନ ହୋଇଥିବା $\frac{100}{q_1}, \frac{p_2}{-102}, \frac{6 \times p_3}{q_3}$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

14. $\{\frac{-15}{n}$: n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଓ $n \le 15\}$ ସେଟ୍‌ରେ ବୃହତ୍ତମ ଓ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଲେଖ ।

15. $\frac{1}{4}$ ଓ $\frac{1}{5}$ ମଧ୍ୟରେ 4 ଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. $-\frac{1}{2}$ ଓ $\frac{1}{3}$ ମଧ୍ୟରେ 3 ଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. $\frac{27}{7}$ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଅସରନ୍ତି ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର ।

18. ପ୍ରମାଣ କର ।

(i) $0.\bar{9} = 1$ (ii) $1.2\bar{9} = 1.3$ (iii) $2.34\bar{9} = 2.35$

19. ପରିମେୟ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $0.\bar{1}$ (ii) $0.\overline{11}$ (iii) $0.\overline{89}$ (iv) $0.\overline{37}$ (v) $0.\overline{123}$ (vi) $0.32\bar{1}$

(vii) $-0.5\bar{4}$ viii) $6.8\bar{9}$ (ix) $-0.\overline{12}$ (x) $0.013\overline{05}$

20. ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର (ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା କିମ୍ବା ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ରୂପରେ) ।

(i) $0.\bar{6} + 0.\bar{3}$ (ii) $0.\bar{6} - (0.\bar{3}) \times 2$ (iii) $(0.\bar{6})^2 + (0.\bar{3})^2 + 2 \times (0.\bar{6}) \times (0.\bar{3})$

(iv) $(0.\bar{6})^2 + (0.\bar{3})^2 - 2 \times (0.\bar{6}) \times (0.\bar{3}) + 0.\bar{6}$ (v) $(0.\bar{6})^2 - (0.\bar{3})^2$

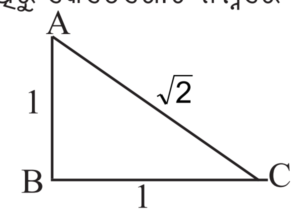
(vi) $(0.\bar{6})^3 + (0.\bar{3})^3 + 3 \times (0.\bar{6}) \times (0.\bar{3})$

(vii) $(0.\bar{6})^3 - (0.\bar{3})^3 - 3 \times (0.\bar{3})\ (0.\bar{6}) \times (0.\bar{6} - 0.\bar{3})$

2.5 ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ର ଅଭାବତ୍ୱ (Inadequacy of Rationals) ଏବଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Irrational numbers) :

ଏକ ଧନାତ୍ମକ ରାଶିର ବର୍ଗମୂଳ ଧନାତ୍ମକ କିମ୍ବା ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇପାରେ। ଏଠାରେ ଆମେ କେବଳ ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳଟିକୁ ବିଚାର କରୁଛେ। $\sqrt{1} = 1$, $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ ଇତ୍ୟାଦି ଆମେ ଜାଣିଛେ। 1, 4, 9, 16,.... ଇତ୍ୟାଦି ବର୍ଗରାଶି (Square number)। ଏହି ବର୍ଗ ରଶିମାନଙ୍କ ପରିବର୍ତ୍ତେ ଆମେ ଯଦି 2, 3, 5,... ଇତ୍ୟାଦି ର ବର୍ଗମୂଳ ନେବା । ଏଗୁଡ଼ିକ ବର୍ଗରାଶି ନ ହୋଇଥିବାରୁ ଏମାନଙ୍କୁ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$....ରୂପେ ଲେଖିବା। ଏମାନଙ୍କୁ ମଧ୍ୟ $2^{1/2}$, $3^{1/2}$, $5^{1/2}$ ଭାବେ ଲେଖି ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ। ବର୍ଗମୂଳ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସହ ଆମେ ପରିଚିତ। 2 ର ବର୍ଗମୂଳ ନିରୂପଣ କଲେ ଆମେ ଦେଖୁ : $\sqrt{2} = 1.4142135623730950488....$ ସେହିପରି $\sqrt{3} = 1.7320508....$, $\sqrt{5} = 2.236068...$ ଇତ୍ୟାଦି । ବର୍ଗମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟରେ ଦଶମିକ ବିନ୍ଦୁ ପରେ ଯେତେ ଅଧିକ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲେ ମଧ୍ୟ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପରିସମାପ୍ତି ଘଟେ ନାହିଁ। ଅର୍ଥାତ୍ ଦଶମିକ ରାଶିଟି ମଧ୍ୟ କେବେ ହିଁ ପୌନଃପୁନିକ ହେବ ନାହିଁ। ସୁତରାଂ ଏ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବେ ନାହିଁ ।

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}, \sqrt{5}$, $2\sqrt{2}$ ଆଦି ସଂଖ୍ୟା ବିଭିନ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଉପୁଜି ଥାଏ। ସେଥିରୁ କେତେଗୋଟି ନିମ୍ନରେ ସୂଚିତ ହେଲା।



(ଚିତ୍ର 2.2)

(i) ABC ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୁଜରେ $m\angle B = 90^0$,
AB = BC = 1 ଏକକ ହେଲେ, ପିଥାଗୋରସ୍ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ
AC = $\sqrt{2}$ ଏକକ ହେବ । ($\because AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$)

(ii) $x^2 - 3 = 0$ ସମୀକରଣ ର ସମାଧାନ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ପାଇବା ନାହିଁ । କାରଣ ଏଠାରେ ଆବଶ୍ୟକ ଧନାତ୍ମକ ବର୍ଗମୂଳଟି $\sqrt{3}$ ହେବ ।

ତେଣୁ ବିଭିନ୍ନ ଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ସମାଧାନ କରିବା ବେଳେ $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ ଇତ୍ୟାଦି ପରି ସଂଖ୍ୟା ଉପୁଜିବେ । ଯାହା ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ର ଉପାଦାନ ନ ହୋଇ ପାରନ୍ତି । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $x^2 - 2 = 0, x^2 - 5 = 0$ ଇତ୍ୟାଦିର ସମାଧାନ Q ସେଟ୍‌ରେ ନ ଥାଏ । ତେଣୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ର ସଂପ୍ରସାରଣ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଆବଶ୍ୟକ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $\sqrt{2}$ ସଂଖ୍ୟାଟି ପରିମେୟ ନୁହେଁ ତାହାର ତାର୍କିକ ପ୍ରମାଣ (Logical proof) ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

$\sqrt{2}$ ସଂଖ୍ୟାଟି ପରିମେୟ ନୁହେଁ ଏହାର ପ୍ରମାଣ ପାଇଁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଧାରଣାଗୁଡ଼ିକ ଆବଶ୍ୟକ।

(i) ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ବ୍ୟାପକ ରୂପ $\frac{p}{q}$ ଯେଉଁଠାରେ p ଓ q ର ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକଟି 1 ଓ ଏହା ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କିଛି ନୁହେଁ। $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$ ଇତ୍ୟାଦି ଲଘିଷ୍ଠାକୃତି ନୁହଁନ୍ତି। ଏମାନଙ୍କର ଲଘିଷ୍ଠାକୃତି ରୂପଟି $\frac{1}{2}$ ।

(ii) ଅନେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ **ବିରୋଧାଭାଷ ପଦ୍ଧତି (Method of contradiction)**ରେ କରାଯାଏ। ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ଆମକୁ ଯଦି ଗୋଟିଏ ଉକ୍ତି ସତ୍ୟ ବୋଲି ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ଥାଏ, ତେବେ ଆମେ ଉକ୍ତିଟିକୁ ଅସତ୍ୟ ବୋଲି ଗ୍ରହଣ କରି ଅଗ୍ରସର ହେଲେ ଏକ ବିରୋଧାଭାଷ (ଯାହାକି ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ) ରେ ପହଞ୍ଚିବାକୁ ଚେଷ୍ଟା

କରି ଥାଉ । ଏପରି ଅଗ୍ରହଣୀୟ ପରିସ୍ଥିତି ଯଦି ଉପୁଜେ ତେବେ ମୂଳରୁ ସ୍ୱୀକାର କରାଯାଇଥିବା ତଥ୍ୟ, ''ଉକ୍ତିଟି ସତ୍ୟ ନୁହେଁ'' କୁ ପରିତ୍ୟାଗ କରିବାକୁ ହେବ । ଏଠାରେ ହିଁ ପ୍ରମାଣଟି ସମ୍ପୂର୍ଣ୍ଣ ହୋଇଥାଏ । ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ଏହି ପଦ୍ଧତିରେ ଅନେକ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ କରିବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଗୋଟିଏ ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ଯୁଗ୍ମ କିମ୍ବା ଅଯୁଗ୍ମ ହୋଇପାରେ । 1, 9, 25, ... ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଅଯୁଗ୍ମ ଓ 4, 16, 36 .... ବର୍ଗ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ଯୁଗ୍ମ । ଏହି ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ଦେଖି ଆମେ କହି ପାରିବା ଯେ "a^2 ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ a ମଧ୍ୟ ଯୁଗ୍ମ'' ଓ "a^2 ଅଯୁଗ୍ମ ହେଲେ a ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା'' । ଉକ୍ତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକର ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ ଉଚ୍ଚମାଧ୍ୟମିକ ସ୍ତରରେ କରାଯିବ ।

ଉପପାଦ୍ୟ-1 : $\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନୁହେଁ । (ସୂଚନା : ବିରୋଧାଭାଷ ପଦ୍ଧତିର ପ୍ରୟୋଗରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇଛି ।)

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

$\therefore \sqrt{2} = \frac{p}{q}, (p, q \in Z$ ଓ $q \neq 0)$ ..... (i) (ଯେଉଁଠାରେ p ଏବଂ q ମଧ୍ୟରେ 1 ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ନାହିଁ । ଅର୍ଥାତ୍ p ଓ q ପରସ୍ପର ମୌଳିକ ।)

(i) ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ବର୍ଗ ନେଲେ $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$ ....(ii)

$2q^2$ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥିବାରୁ p^2 ମଧ୍ୟ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

ସୁତରାଂ p ମଧ୍ୟ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ।

ମନେକର $p = 2n$ .... (iii) (ଯେଉଁଠାରେ n ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା)

(ii) ଓ (iii) ରୁ $2q^2 = (2n)^2 = 4n^2 \Rightarrow q^2 = 2n^2$ ....(iv)

ଅର୍ଥାତ୍ q^2 ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା । ତେଣୁ q ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା । ଅତଏବ $q = 2m$ .....(v)

(iii) ଓ (v) ଏକତ୍ର ବିଚାର କଲେ ପାଇବା, p ଓ q ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା । ଅର୍ଥାତ୍ p ଓ q ମଧ୍ୟରେ 2 ହେଉଛି ଏ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ । ମାତ୍ର ଏହା ଅସମ୍ଭବ, ଆମେ ପ୍ରଥମରୁ ଧରି ନେଇଛେ p ଓ q ମଧ୍ୟରେ 1 ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ନାହିଁ । ତେଣୁ ଆମେ ସ୍ୱୀକାର କରିଥିବା ଉକ୍ତି (i) ଏକ ଅସତ୍ୟ ଉକ୍ତି । ଏହି ବିରୋଧାଭାଷ ହେତୁ ଏହା ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ''$\sqrt{2}$ ସଂଖ୍ୟାଟି ପରିମେୟ ନୁହେଁ'' । (ପ୍ରମାଣିତ)

$\sqrt{2}$ ଇତ୍ୟାଦି ପରି ରାଶିମାନଙ୍କୁ ଆମେ **ଅପରିମେୟ** (irrational) ସଂଖ୍ୟା କହିଥାଉ । ଅନୁରୂପ ଭାବେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରେ ଯେ $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{11}$ ଇତ୍ୟାଦି ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଅପରିମେୟ ।

ମନେରଖ ଯେ, **p** ମୌଳିକ ହେଲେ $\sqrt{p}$ ଅପରିମେୟ ହେବ ।

2.6 ଅସୀମ ଓ ଅଣପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ରାଶି (Non-terminating and non-recurring decimals) :

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକ ସସୀମ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାରେ ବା ଅସୀମ ଓ ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ । କିନ୍ତୁ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଦଶମିକ ରୂପ (ଅନୁଚ୍ଛେଦ 2.5ରେ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ଓ $\sqrt{5}$ ର ଦଶମିକ ରୂପକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର) ଅସୀମ ହେବ ଏବଂ ଅଣ-ପୌନଃପୁନିକ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : 0.2020020002000020000002....,

-1.1181118111181111181111118111111118......,

7.121122111222111122221111122222...... ଇତ୍ୟାଦି ଅପରିମେୟ

କେବଳ ବର୍ଗମୂଳ ଜରିଆରେ (ଯଥା : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ଓ $\sqrt{5}$ ଇତ୍ୟାଦି) ଯେ, ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଉପୁନ୍ନ ହୁଏ ତାହା ନୁହେଁ । ସମୀକରଣ $x^3 = 2, x^4 = 2$... ଇତ୍ୟାଦି ସମୀକରଣକୁ ସମାଧାନ କରି $\sqrt[3]{2}, \sqrt[4]{2}$ ...ଇତ୍ୟାଦି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇପାରିବା । n-ତମ ମୂଳ ନେଇ ଉପୁନ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ବିଷୟରେ ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିବ ।

ମନେରଖ : ବାସ୍ତବିକ ଯେତେ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଛି ତା'ଠାରୁ ଯଥେଷ୍ଟ ଅଧିକ ସଂଖ୍ୟାର ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ରହିଛି ।

ଉଦାହରଣ - 6 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, (i) $3 + \sqrt{2}$ (ii) $3\sqrt{2}$ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ।

ସମାଧାନ : (i) ମନେକର $3 + \sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା।

ସୁତରାଂ $3 + \sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ଯେଉଁଠାରେ $p, q \in Z$ ଓ $q \neq 0$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{q} - 3 = \frac{p-3q}{q} \in Z$ କାରଣ $p - 3q \in Z$ ଏବଂ $q \in Z$ ଯେଉଁଠାରେ $q \neq 0$ ।

ସୁତରାଂ $\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହା ଉପପାଦ୍ୟ –1 ର ଏକ ବିରୋଧାଭାଷ । ଅତଏବ ଆମେ ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ତଥ୍ୟ $3 + \sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ। ଅର୍ଥାତ୍ $3 + \sqrt{2}$ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

(ii) $3\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଉ। ତେଣୁ $3\sqrt{2} = \frac{p}{q}; p, q \in Z$ ଓ $q \neq 0$

$\Rightarrow \sqrt{2} = \frac{p}{3q}$ ଓ ଏଠାରେ $p, 3q \in Z$ ଓ $3q \neq 0$ ହେତୁ $\frac{p}{3q} \in Z$

ସୁତରାଂ $\sqrt{2}$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା । ମାତ୍ର ଏହା ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ । ତେଣୁ $3\sqrt{2}$ ମଧ୍ୟ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା।

2.7 ଅପରିମେୟ ରାଶି π (Irrational number π) :

π ସଂଖ୍ୟା ସହ ତୁମେମାନେ ଜ୍ୟାମିତିରେ ପରିଚିତ । **π** ରାଶିଟି ବୃତ୍ତ ସହ ଓତପ୍ରୋତ ଭାବେ ସମ୍ପର୍କିତ। ଏହାର ସଂଜ୍ଞା ହେଲା : **ଯେକୌଣସି ବୃତ୍ତରେ ପରିଧି ଓ ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଅନୁପାତ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ସଂଖ୍ୟା (Constant); ଯାହାକୁ π ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇଥାଏ ।** ଅର୍ଥାତ୍ ଯେକୌଣସି ବୃତ୍ତରେ $\frac{\text{ବୃତ୍ତର ପରିଧି}}{\text{ବ୍ୟାସର ଦୈର୍ଘ୍ୟ}} = \pi$ ।

1761 ମସିହାରେ ଗଣିତଜ୍ଞ Lambert ଯୁକ୍ତି ମୂଳକ ପ୍ରମାଣ କରି ଦର୍ଶାଇ ଥିଲେ ଯେ "**π** ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା"। ଗ୍ରୀକ୍ ଦାର୍ଶନିକ ଆର୍କିମେଡ଼ିସ୍ (ଖ୍ରୀ.ପୂ. 287-212) ଏହାର ଆସନ୍ନମାନ $\frac{22}{7}$ ବୋଲି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିଥିଲେ। ମନେରଖ ଯେ $\pi \neq \frac{22}{7}$ ମାତ୍ର $\pi \approx \frac{22}{7}$ (ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{22}{7}$ ଦଶମିକରେ ଲେଖିଲେ ଲବ୍ଧ ମୂଲ୍ୟ **π** ର କେବଳ ଦଶମିକ ଦୁଇ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଠିକ୍ ଓ $\frac{22}{7}$, **π** ର ଏକ ପାଖାପାଖି (ଆସନ୍ନ) ମୂଲ୍ୟ)। ବିଭିନ୍ନ କ୍ଷେତ୍ରରେ **π** ର ଆସନ୍ନ ମାନ $\frac{22}{7}$

ବ୍ୟବହୃତ ହୋଇ ଗାଣିତିକ ହିସାବ ଏବେ ମଧ୍ୟ ଆମେ କରୁଛୁ । ମାତ୍ର $\pi = \frac{22}{7}$ ଲେଖିବା ତୃଟିପୂର୍ଣ୍ଣ ।

ବିଭିନ୍ନ ସଭ୍ୟତା ଓ ବିଭିନ୍ନ ସମୟରେ π ର ବିଭିନ୍ନ ଆସନ୍ନମାନର ତାଲିକା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

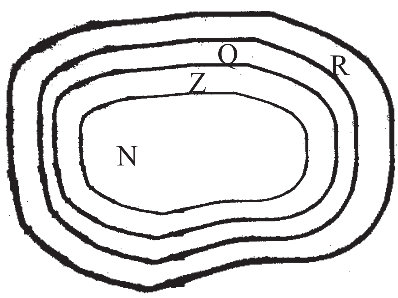
ଗଣିତଜ୍ଞ / ସଭ୍ୟତା	ସମୟ	πର ମାନ
ବେଦ	ସମ୍ଭବତଃ ଖ୍ରୀ.ପୂ. 3000	$\sqrt{10}$
ବେବିଲୋନୀୟ ସଭ୍ୟତା	ସମ୍ଭବତଃଖ୍ରୀ.ପୂ. 3000	$\frac{25}{8}$
ଆର୍କିମେଡ଼ିସ୍	ଖ୍ରୀ.ପୂ. 287-212	$\frac{22}{7}$
ଟଲେମି	ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 150	3.1416
ଚୁଙ୍ଗ ଚି (ଚୀନ୍)	ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 480	$\frac{335}{133}$
ଆର୍ଯ୍ୟଭଟ୍ଟ	ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 530	$\frac{62832}{20000}$
ଭାସ୍କରାଚାର୍ଯ୍ୟ	ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 1150	$\frac{3927}{1250}$
ରାମାନୁଜନ୍	ଖ୍ରୀଷ୍ଟାବ୍ଦ 1887 - 1919	$\frac{9801}{1103 \times \sqrt{8}}$

ଭାରତ ର ସୁପ୍ରସିଦ୍ଧ ଗଣିତଜ୍ଞ ଶ୍ରୀନିବାସ ରାମାନୁଜନ୍‌ଙ୍କ ପ୍ରଦତ୍ତ ଏକ ସୂତ୍ରର ବ୍ୟବହାର କରି କମ୍ପ୍ୟୁଟର ସହାୟତାରେ π ର ମୂଲ୍ୟ ଦଶମିକ ଚିହ୍ନ ପରେ ସତର ନିୟୁତ ସ୍ଥାନ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିରୂପିତ ହୋଇଛି । ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ନିରୂପିତ π ର ମୂଲ୍ୟମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଏହା ସର୍ବାଧିକ ସଠିକ ମାନ ଅଟେ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଏଠାରେ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ ଯେ π ପରି ଅନ୍ୟ ଏକ ସଂଖ୍ୟା e ଯାହାର ମୂଲ୍ୟ 2 ରୁ ଅଧିକ ଓ 3 ରୁ କମ୍ । ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟାଟି $1 + 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + ...$ ଏକ ସୀମାହୀନ ସମଷ୍ଟି । π,e, ଇତ୍ୟାଦି ପରି ଅଂସଖ୍ୟ ଅପରିମେୟ ରାଶିର ଗଣିତରେ ବ୍ୟବହାର ଉଚ୍ଚତର ଶ୍ରେଣୀ କୁ ଗଲେ ଦେଖିବାକୁ ପାଇବ ।

2.8 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା (Real Numbers) :

ସମସ୍ତ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌କୁ Q' ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ଲେଖାଯାଏ । ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ Q' ର ସଂଯୋଗରୁ ଯେଉଁ ନୂତନ ସେଟ୍ ମିଳେ ତାହାକୁ **ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା (Real number)** ସେଟ୍ କୁହାଯାଏ ଓ ଏହି ସେଟ୍‌ର ସଂକେତ R । ଅତଏବ **$Q \cup Q' = R$** । ଏଠାରେ Q ଏବଂ Q' , R ସେଟ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉପସେଟ୍ ଅଟନ୍ତି । ମନେରଖ ଯେ, **$Q \cap Q' = \phi$**



(ଚିତ୍ର 2.3)

ଆଲୋଚନାରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ଏକ ପରିମେୟ କିମ୍ବା ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇପାରେ। ସମ୍ପ୍ରସାରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛେ ଯେ, $N \subset Z \subset Q \subset R$ ।

ଭେନ୍ ଚିତ୍ର 2.3 ମାଧ୍ୟମରେ ବିଭିନ୍ନ ସେଟ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

2.8.1 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ବୀଜ ଗାଣିତିକ ଧର୍ମ (Algebraic Properties in Reals) :

ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦଗୁଡ଼ିକରେ ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ଧର୍ମଗୁଡ଼ିକୁ ଆଲୋଚନା କରିଛେ । ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ କେତେକ ନିୟମ ପାଳନ କରନ୍ତି ଯାହା ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ପାଇଁ ସତ୍ୟ ନ ହୋଇପାରେ । ଆମେ ଏଠାରେ କେତେକ ବୀଜଗାଣିତିକ ଧର୍ମର ଅବତାରଣା କରିବା, ଯାହା କି ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ (R) ପାଇଁ ସତ୍ୟ ଅଟେ । ଏଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରମାଣ ଏ ପୁସ୍ତକର ପରିସରଭୁକ୍ତ ନ ହୋଇଥିବାରୁ ଆମେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରିବା । $x, y, z \in R$

ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଧର୍ମ :-

(i) ***ସଂବୃତ୍ତି ଧର୍ମ :*** $x + y \in R$

(ii) ***କ୍ରମବିନିମୟୀ ଧର୍ମ :*** $x + y = y + x$

(iii) ***ସହଯୋଗୀ ଧର୍ମ :*** $x + (y + z) = (x + y) + z$

(iv) ***ଅଭେଦ ଧର୍ମ :*** $x + 0 = x$; 0 (ଶୂନ R ସେଟ୍ ରେ ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ ଅଟେ ।)

(v) ***ବିଲୋମୀ ଧର୍ମ :*** ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ $(-x)$ ଓ $x + (-x) = 0$

(x ମଧ୍ୟ $(-x)$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।)

ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ଧର୍ମ :

(vi) ***ସଂବୃତ୍ତି ଧର୍ମ :*** $xy \in R$

(vii) ***କ୍ରମବିନିମୟୀ ଧର୍ମ :*** $xy = yx$

(viii) ***ସହଯୋଗୀ ଧର୍ମ :*** $x(yz) = (xy)z$

(ix) ***ଅଭେଦ ଧର୍ମ :*** $x \times 1 = x$; (1 (ଏକ) ସଂଖ୍ୟାଟି ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ ।)

(x) ***ବିଲୋମୀ ଧର୍ମ :*** ପ୍ରତ୍ୟେକ $x \neq 0$ ପାଇଁ ଏକ ଅନନ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା $\frac{1}{x}$ ବା x^{-1} ରହିଛି,

ଯେପରିକି $x \cdot x^{-1} = 1$

($\frac{1}{x}$ ବା x^{-1} କୁ x ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ କୁହାଯାଏ) । x, x^{-1} ର ମଧ୍ୟ ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଅଟେ ।

ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଦ୍ୱୟର ଧର୍ମ :

(xi) ***ବଣ୍ଟନ ନିୟମ :*** $x(y+z) = xy + xz$ (ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଉପରେ ବାଣ୍ଟି ହେବ)

ନିମ୍ନରେ ସୂଚିତ ଉକ୍ତିଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରଣିଧାନ ଯୋଗ୍ୟ।

(i) ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା x ଓ y ର ଯୋଗଫଳ ତଥା ଗୁଣନ ଫଳ ପରିମେୟ (Q ସେଟ୍‌ରେ ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମ)।

$x, y \in Q$ ହେଲେ, $x + y \in Q$ ଏବଂ $xy \in Q$

(ii) ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ଓ y ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ଓ ଅନ୍ୟଟି ଅପରିମେୟ ହେଲେ ଯୋଗଫଳ x+y ଅପରିମେୟ ଓ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଟି ଅଣଶୂନ୍ୟ ହେଲେ ଗୁଣଫଳ ମଧ୍ୟ ଅପରିମେୟ। ମାତ୍ର ଗୁଣଫଳ = 0 ହେବ ଯଦି ପରିମେୟ ରାଶିଟି ଶୂନ। ଏଠାରେ ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ : **$x \times 0 = 0$ (Zero Law)**

ପ୍ରମାଣ : $0 + 0 = 0$ (ଅଭେଦ ନିୟମ)

$\Rightarrow x\,(0 + 0) = x.\,0$ (ସମାନତା ଧର୍ମ)

$\Rightarrow x\,.\,0 + x\,.\,0 = x.\,0$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

କିନ୍ତୁ $x\,.\,0 + x\,.\,0 - (x.0) = x.0 - (x\,.\,0)$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ $-(x\,.\,0)$ ଯୋଗ କରି)

$\Rightarrow x\,.0 + \{-(x.0) + x\,.\,0\} = \{-(x.0) + x.0\}$ (ସହଯୋଗୀ ନିୟମ)

$\Rightarrow x\,.0 + 0 = 0$ (ବିଲୋମୀ ନିୟମ)

$\Rightarrow x\,.\,0 = 0$ (ଅଭେଦ ନିୟମ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ସହ 0 କୁ ଗଣନ କଲେ ଗୁଣଫଳ 0 ।

(iii) x ଓ y ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଉଭୟେ ଅପରିମେୟ ହେଲେ ଯୋଗଫଳ $x + y$ କିମ୍ବା ଗୁଣଫଳ xy ପରିମେୟ କିମ୍ବା ଅପରିମେୟ ହୋଇପାରନ୍ତି। ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ

$x = \sqrt{2}, y = 3$ ହେଲେ $x + y = \sqrt{2} + 3$ ଓ ଯାହା ଅପରିମେୟ;

$x = 1 + \sqrt{2}, y = 1 - \sqrt{2}$ ହେଲେ, $x + y = 2$ ଯାହା ପରିମେୟ;

$x = \sqrt{2}, y = \sqrt{3}$ ହେଲେ $xy = \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$ ଯାହା ଅପରିମେୟ;

(ନିଜେ ପ୍ରମାଣ କରି ଦେଖ)

$x = 1 - \sqrt{2}, y = 1 + \sqrt{2}$ ହେଲେ $xy = (1 - \sqrt{2})\,(1 + \sqrt{2}) = 1 - 2 = -1$ ଯାହା ପରିମେୟ । ଏହି ଆଲୋଚନା ରୁ ଆମେ ଦେଖୁଛେ ଯେ **Q' ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସଂବୃତ୍ତି ଧର୍ମକୁ ପାଳନ କରନ୍ତି ନାହିଁ।**

$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}, \sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}, \sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}}$ .... ଇତ୍ୟାଦି ଅପରିମେୟ ।

$\sqrt{4} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$ ଓ ଏହା ପରିମେୟ। **a^n ରେ a କୁ ଆଧାର (base) ଓ n କୁ ଘାତ (index) କୁହାଯାଏ।**

ସେହିପରି ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଆଧାର ଓ ଘାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର :

$2^{\frac{1}{3}}, 3^{\frac{1}{3}}, 4^{\frac{1}{3}}, 5^{\frac{1}{3}}, 6^{\frac{1}{3}}, 7^{\frac{1}{3}}, 9^{\frac{1}{3}}$ ..... ଇତ୍ୟାଦି ($8^{1/3} = 2, = 27^{1/3} = 3$ ଇତ୍ୟାଦିକୁ ଛାଡ଼ି)

$2^{\frac{1}{4}}, 3^{\frac{1}{4}}, 4^{\frac{1}{4}}, 5^{\frac{1}{4}}, 6^{\frac{1}{4}}, 7^{\frac{1}{4}}, 8^{\frac{1}{4}}$ .... ଇତ୍ୟାଦି ($16^{1/4} = 2, 81^{1/4} = 3$ ଇତ୍ୟାଦିକୁ ଛାଡ଼ି)

. . . .

. . . .

ସୁତରାଂ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ଅସୀମ। ଆମେ N ସେଟ୍‌ର Z ସେଟ୍‌ର, ଓ Q ସେଟ୍‌ର ଉପାଦାନମାନଙ୍କୁ ଗୋଟି ଗୋଟି କରି ତାଲିକା କରି ଲେଖିବା ସମ୍ଭବ। ମାତ୍ର Q' ସେଟ୍‌ରେ ଏପରି ତାଲିକା କରି ଲେଖିବା ଅସମ୍ଭବ। ଯଦି ଏପରି ତାଲିକା କରିବା ତେବେ ଦୁଇଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ ଅସଂଖ୍ୟ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅପସାରିତ ହୋଇ ତାଲିକା ଭୁକ୍ତ ହୋଇ ପାରିବେ ନାହିଁ। ଯେହେତୁ R ସେଟ୍‌ରେ Q' ସେଟ୍ ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନ ଅଛନ୍ତି, ତେଣୁ ଆମେ କହି ପାରିବା ଯେ R ସେଟ୍‌ର ସମସ୍ତ ଉପାଦାନମାନଙ୍କ ତାଲିକା କରି ହେବ ନାହିଁ।

2.8.2 R ସେଟ୍‌ରେ ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କିଛି ଅଧିକ ତଥ୍ୟ :

R ସେଟ୍ ରେ ଯୋଗ ଓ ଗୁଣନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଥିବା ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟମାନଙ୍କୁ ପ୍ରୟୋଗ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ ମାନଙ୍କ ସତ୍ୟତା ଜାଣିହୁଏ। ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ସମାଧାନ କଲାବେଳେ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଇଥାଏ। ସେହି ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତଗୁଡ଼ିକ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି। ଏଠାରେ x,y,z ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 1 : $x + y = x + z$ ହେଲେ, $y = z$ ଓ $y + x = z + x$ ହେଲେ $y = z$

ପ୍ରମାଣ : $x + y = x + z \Rightarrow (-x) + (x + y) = (-x) + (x + z)$

$\Rightarrow (-x + x) + y = (-x + x) + z$

$\Rightarrow 0 + y = 0 + z \Rightarrow y = z$ ।

ସେହିପରି $y + x = z + x \Rightarrow y = z$ ର ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ।

ଏ ଦୁଇଟି କୁ ଯୋଗ ର **ବିଲୋପନ ନିୟମ (Cancellation law of addition)** କୁହାଯାଏ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 2 : $x \neq 0$ ଏବଂ $xy = xz$ ହେଲେ, $y = z$ ଓ $yx = zx$ ହେଲେ, $y = z$

ପ୍ରମାଣ : $x \neq 0$ ହେଲେ ଏହାର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ x^{-1} । ଅତଏବ

$xy = xz \Rightarrow x^{-1}(xy) = x^{-1}(xz)$

$\Rightarrow (x^{-1}x)y = (x^{-1}x)z$

$\Rightarrow 1.y = 1.z \Rightarrow y = z$; ସେହି ପରି ଅନ୍ୟଟିର ମଧ୍ୟ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରେ, $yx = zx$ ହେଲେ, $y = z$

ଏହି ଦୁଇଗୋଟିକୁ **ଗୁଣନ ର ବିଲୋପନ ନିୟମ (Cancellation law of multiplication)** କୁହାଯାଏ।

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 3 : (i) $x \times 0 = 0$ (ii) $-(-x) = x$ (iii) $x \neq 0$ ହେଲେ $(x^{-1})^{-1} = x$

ପ୍ରମାଣ : (i) $0 = 0 + 0$ (ଅଭେଦ ନିୟମ)

$\Rightarrow x \times 0 = x(0+0) \Rightarrow x \times 0 = x \times 0 + x \times 0$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$\Rightarrow 0 = x \times 0$ (ଯୋଗର ବିଲୋପନ ନିୟମର ପ୍ରୟୋଗ)

$\Rightarrow x \times 0 = 0$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) $x \in R$ ହେଲେ $-x \in R$ ଓ $-x$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ $-(-x) \Rightarrow -(-x) + (-x) = 0$

$\Rightarrow -(-x) + (-x) = x + (-x)$ $[\because x + (-x) = 0]$

$\Rightarrow -(-x) = x$ (ଯୋଗର ବିଲୋପନ ନିୟମ) (ପ୍ରମାଣିତ)

(iii) $x(x \neq 0)$ ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ x^{-1}, x^{-1} ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ $(x^{-1})^{-1}$ ।

କୌଣସି ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା a ପାଇଁ $a \times a^{-1} = 1$ ଯେଉଁଠାରେ $a \neq 0$ ।

a ସ୍ଥାନରେ x^{-1} ସ୍ଥାପନ କଲେ ପାଇବା $(x^{-1}) . (x^{-1})^{-1} = 1$

କିନ୍ତୁ $x . x^{-1} = 1$ $\therefore (x^{-1}) . (x^{-1})^{-1} = x . x^{-1}$

$\Rightarrow (x^{-1})^{-1} = x$ (ଗୁଣନର ବିଲୋପନ ନିୟମ) (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ - 4 : (i) $x(-y) = (-x)y = -(xy)$

(ii) $(-x)(-y) = xy$

ପ୍ରମାଣ : (i) $xy + x(-y) = x\{y+(-y)\} = x \times 0 = 0$;

ପୁନଶ୍ଚ $xy + \{-(xy)\} = 0$ ।

$\therefore xy + x(-y) = xy + \{-(xy)\} \Rightarrow x(-y) = -xy$ (ଯୋଗର ବିଲୋପନ ନିୟମ)

ସେହିପରି ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରେ ଯେ, $(-x)y = -(xy)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(ii) $x(-y) = -(xy)$ (i) ରେ ପ୍ରମାଣିତ

x ପରିବର୍ତ୍ତେ $-x$ ଲେଖିଲେ ପାଇବା :

$\Rightarrow (-x)(-y) = -\{(-x) . y\}$

$\Rightarrow (-x)(-y) = -\{(-xy)\}$ $[\because (-x) . y = -(xy)]$ (i) ରୁ ପ୍ରମାଣିତ

$\Rightarrow (-x)(-y) = xy$ $[\because -(-x) = x]$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୀଜଗାଣିତିକ ଅଭେଦରେ ବ୍ୟବହୃତ ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଅଭେଦ ଗୁଡ଼ିକୁ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇ ପାରିବ । ଦତ୍ତ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ପ୍ରମାଣ କର : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $(a, b \in R)$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a(a+b) + b(a+b)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= a . a + a . b + b . a + b . b = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + ab + ab + b^2$ $(\because ab = ba)$

$= a^2 + 2ab + b^2$ = ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ (ପ୍ରମାଣିତ)

2.9 ସଂଖ୍ୟାରେଖା (Number Line) :

ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦ 2.8 ରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଛି ଯେ, ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକର ସେଟ୍ ଦୁଇଟିର ସଂଯୋଗ (Union) ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଅଟେ । ଏହି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକର ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ କିପରି କରାଯାଏ, ତାହା ଏଠାରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । ଇଉକ୍ଲିଡୀୟ ଜ୍ୟାମିତିର କ୍ରମ ବିକାଶ ଘଟିଛି । ବର୍ତ୍ତମାନ ଜ୍ୟାମିତି କେବଳ ବିନ୍ଦୁ, ରେଖା, କ୍ଷେତ୍ର ବା ଆୟତନର ବିଷୟବସ୍ତୁ ହୋଇ ରହିନାହିଁ । ବୀଜଗାଣିତିକ ରାଶି ଓ ଜ୍ୟାମିତ ସହସଂପର୍କକୁ ନେଇ ବିଶ୍ଳେଷଣାତ୍ମକ ଜ୍ୟାମିତି (analytical geometry)ର ଉଦ୍ଭବ । ଯେ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏକ ସରଳରେଖାର ଏକ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଇପାରିବ । ପ୍ରତ୍ୟେକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରି ସେ ଗୁଡ଼ିକୁ ଛନ୍ଦି ଦେଲେ ଗୋଟିଏ ନିରବଚ୍ଛିନ୍ନ ସରଳରେଖା ସୃଷ୍ଟି ହେବ । ଏହା ବିଖ୍ୟାତ

ଗାଣିତିକ ଡେଡେକିଣ୍ଡ (Dedekind) ଓ କାଣ୍ଟର (Cantor)ର ଙ୍କ ଅବଦାନ ଓ ଏହା ବିଶ୍ଳେଷଣାତ୍ମକ ଜ୍ୟାମିତିର ଅୟମାରମ୍ଭ । ଅର୍ଥାତ୍ ଯେ କୌଣସି ଜ୍ୟାମିତିକ ବିଷୟବସ୍ତୁକୁ ଆମେ ବୀଜଗଣିତ ସାହାଯ୍ୟରେ ସମାଧାନ କରିପାରିବା । ସେ ସବୁ ତୁମେ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଅଧ୍ୟୟନ କରିବ ।

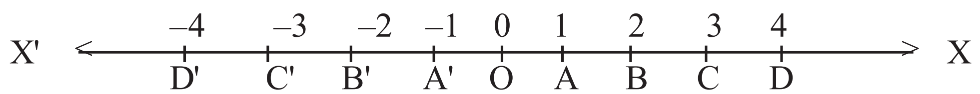
2.9.1 ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସ୍ଥାପନ (Representation of real numbers on the number line) :

ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକର ଜ୍ୟାମିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ହେଲେ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁକୁ O ନିଆଯାଉ । ଏହି ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ $\overleftrightarrow{X'OX}$ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କର । O ବିନ୍ଦୁକୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ (Origin) ଓ $\overleftrightarrow{X'X}$ ରେଖାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା (Number Line) ବା ବାସ୍ତବ ଅକ୍ଷ (Real axis) କୁହାଯାଏ । O ର ଏକ ପାର୍ଶ୍ୱ $\overrightarrow{OX}$ କୁ ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ (positive side) ଓ ଏହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱ $\overrightarrow{OX'}$ କୁ ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗ (Negative side) କୁହାଯାଏ ।

(a) ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସ୍ଥାପନ

କୌଣସି ଏକ ରେଖାଖଣ୍ଡ ନେଇ ତାହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ ଏକ ଏକକ ବୋଲି ନିଆଯାଉ । O ବିନ୍ଦୁର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା (0) ଶୂନ ହେଉ । ଦତ୍ତ ଏକକ ସହ ସମାନ କରି 0 ବିନ୍ଦୁରୁ $\overrightarrow{OX}$ ଦିଗରେ OA ଛେଦ କରାଯାଉ । ଅର୍ଥାତ୍ OA ଏକ ଏକକ ପ୍ରାପ୍ତ A ବିନ୍ଦୁର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା 1 ହେଲା । ସେହିପରି ବିପରୀତ ଦିଗ $\overrightarrow{OX'}$ ରୁ ଏକ ଏକକ ସହ ସମାନ କରି OA′ ଛେଦ କଲେ, A′ ବିନ୍ଦୁର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା –1 ହେବ ।

ସେହିପରି $\overrightarrow{OX}$ ରେଖା ଉପରେ A ଠାରୁ ଏକକ ଦୂରରେ B ବିନ୍ଦୁ, B ଠାରୁ ଏକକ ଦୂରରେ C ବିନ୍ଦୁ, C ଠାରୁ ଏକକ ଦୂରରେ D ବିନ୍ଦୁ - ଏହିପରି ପ୍ରତି ଏକକ ଦୂରରେ ବିନ୍ଦୁମାନ ସ୍ଥାପନ କରାଯାଏ । ଏହି ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ 2, 3, 4 ଇତ୍ୟାଦି ହେବ । ସେହିପରି $\overrightarrow{OX'}$ ଦିଗରେ B', C', D' ଇତ୍ୟାଦି ବିନ୍ଦୁ ନେଲେ, ଏହି ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା ଯଥାକ୍ରମେ –2, –3,–4 ଇତ୍ୟାଦି ହେବ । ଏହିପରି ଭାବରେ $\overleftrightarrow{X'X}$ ରେଖା ଉପରେ ସମସ୍ତ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ସ୍ଥାପନ କରିପାରିବା । $\overleftrightarrow{X'X}$ ରେଖା ଉପରେ ଯଥାକ୍ରମେ O, A, A', B, B', C, C' ଇତ୍ୟାଦି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (co-ordinate) ଚିତ୍ର 2.4ରେ ଦେଖାଇ ଦିଆଯାଇଛି ।



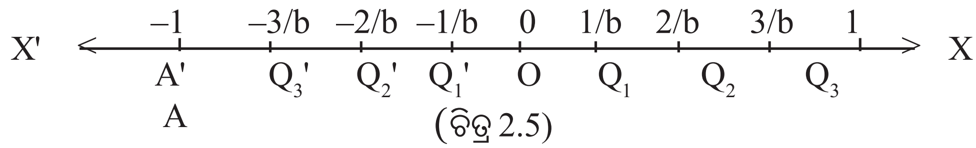
(ଚିତ୍ର 2.4)

(b) ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ଥାପନ :

ସଂଖ୍ୟାରେଖା $\overleftrightarrow{X'X}$ ରେ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ଉପସ୍ଥାପନ ହେବାପରେ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଆହୁରି ଅସଂଖ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ରହିଯାଉଛି । ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେବେ ନାହିଁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ $\overleftrightarrow{X'X}$ ଉପରେ ସୂଚିତ କରିବା ।

ମନେକର $b > 1$ ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା । ତେଣୁ $\frac{1}{b}$ ଏକ ପ୍ରକୃତ ଭଗ୍ନାଂଶ (proper fraction) ହୋଇଥିବାରୁ, ଏହି ସଂଖ୍ୟାଟି 0 ଠାରୁ ବଡ଼ ଓ 1 ଠାରୁ ଛୋଟ ଅଟେ । ତେଣୁ ଏହି ସଂଖ୍ୟାଟି O ବିନ୍ଦୁର ଧନ ଦିଗରେ O ଓ A ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ ।

$\overline{OA}$ (ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଏକକ) ରେଖାଖଣ୍ଡକୁ b ସମାନ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କଲେ, ପ୍ରତି ସମାନ ଭାଗର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\frac{1}{b}$ ହେବ । ଛେଦ ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ଯଥାକ୍ରମେ Q_1, Q_2, Q_3.... ହେଲେ, ଏହି ଛେଦ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{1}{b}, \frac{2}{b}, \frac{3}{b}$...ହେବ । ସେହିପରି ଋଣାତ୍ମକ ପରିମେୟ ରାଶି $-\frac{1}{b}, -\frac{2}{b}, -\frac{3}{b}$... ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡ଼ିକ ରେଖାର ଋଣ ଦିଗ $\overrightarrow{OX'}$ ଉପରେ ଅବସ୍ଥାପିତ ହେବ । ଏହିପରି ଭାବରେ ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ସ୍ଥାପନ କରାଯାଇପାରିବ ।



(ଚିତ୍ର 2.5)

(c) ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ସ୍ଥାପନ ।

ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସମୂହକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ସ୍ଥାପନ କଲା ପରେ ଆହୁରି ଅସଂଖ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ରହିଯାଉଛନ୍ତି, ଯେଉଁ ଗୁଡ଼ିକୁ ଆମେ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରିନାହୁଁ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ ଏକ ଏକକ ବାହୁ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ସମକୋଣୀ ସମଦ୍ୱିବାହୁ ତ୍ରିଭୂଜର କର୍ଣ୍ଣର ଦୈର୍ଘ୍ୟ $\sqrt{1^2+1^2}$ ଅର୍ଥାତ୍ $\sqrt{2}$ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା । କିନ୍ତୁ ଏହାକୁ ଏ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଉପସ୍ଥାପନ କରିନାହୁଁ ।

$\sqrt{2}$ କୁ ଉପସ୍ଥାପନ କରିବାକୁ ହେଲେ, ମୂଳବିନ୍ଦୁ O ରୁ $\overrightarrow{OX}$ ଉପରିସ୍ଥ A ବିନ୍ଦୁ ନିଆଯାଉ, ଯେପରି OA=1 ଏକକ । A ବିନ୍ଦୁରେ $\overrightarrow{OX}$ ପ୍ରତି $\overline{AB}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର ଯେପରିକି AB = OA । $\overline{OB}$ ଅଙ୍କନ କରାଯାଉ ।

ପିଥାଗୋରାସ୍‌ଙ୍କ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ $OB = \sqrt{OA^2 + AB^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

ବର୍ତ୍ତମାନ O କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଓ OB କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ ଅଙ୍କନ କର, ଯାହା $\overrightarrow{OX}$ କୁ P ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ଯେହେତୁ $OP = \sqrt{2}$, ତେଣୁ P ବିନ୍ଦୁ $\sqrt{2}$ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲା । ଅର୍ଥାତ୍ $\sqrt{2}$, P ବିନ୍ଦୁରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେଲା । (ଚିତ୍ର ୨.୬ ଦେଖ) ।

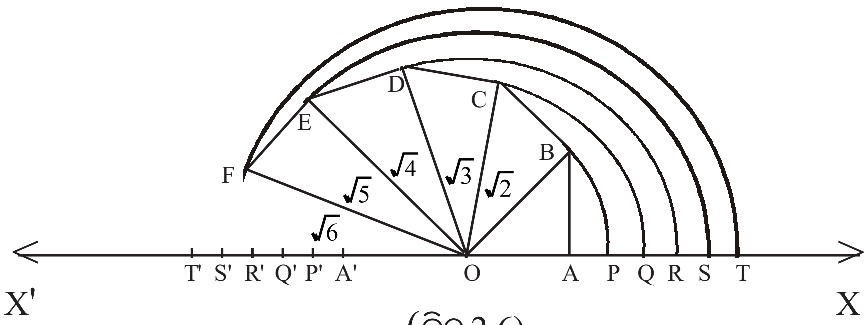
ପୁନଶ୍ଚ $\overline{OB}$ ରେଖାଖଣ୍ଡ ପ୍ରତି B ବିନ୍ଦୁରେ $\overline{BC}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର, ଯେପରିକି BC = OA ।

$\therefore \quad OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$

O କୁ କେନ୍ଦ୍ରକରି ଓ OC କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ ଅଙ୍କନ କଲେ, ତାହା $\overrightarrow{OX}$ କୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । $OQ = \sqrt{3}$ ହେତୁ Q ବିନ୍ଦୁଟି $\sqrt{3}$ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲା ।

ଏହିପରି ଆମେ $OD = \sqrt{4}$, $OE = \sqrt{5}$, $OF = \sqrt{6}$ ଇତ୍ୟାଦି ପାଇବା । ପୂର୍ବପରି O କୁ କେନ୍ଦ୍ର ଓ ଯଥାକ୍ରମେ OD, OE, OF କୁ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ନେଇ ଚାପ ଅଙ୍କନ କଲେ ଚାପ ଗୁଡ଼ିକ $\overrightarrow{OX}$ କୁ ଯଥାକ୍ରମେ R, S, T ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବ । ବର୍ତ୍ତମାନ R, S, T ବିନ୍ଦୁମାନ ଯଥାକ୍ରମେ $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେବ । ସେହି ଦୈର୍ଘ୍ୟ ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଆମେ ପୂର୍ବଭଳି $\overrightarrow{OX'}$ ରେଖା ଉପରେ $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$, $-\sqrt{4}$, $-\sqrt{5}$, $-\sqrt{6}$ ସଂଖ୍ୟାମାନ ସ୍ଥାପନ କରିପାରିବା;

ଯାହା ଯଥାକ୍ରମେ P', Q', R', S' ଏବଂ T' ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ହେବ । ଏଗୁଡ଼ିକୁ ସୂଚାଇବା ପାଇଁ ଆମକୁ ସ୍କେଲ୍ ଓ କମ୍ପାସ୍ ବ୍ୟବହାର କରିବାକୁ ପଡ଼ିବ ।



(ଚିତ୍ର 2.6)

ଏହି ସବୁ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକୁ $\overleftrightarrow{X'X}$ ସରଳରେଖା ଉପରେ ସ୍ଥାପନ କରିସାରିବା ପରେ ମଧ୍ୟ ଅନ୍ୟ ବିନ୍ଦୁ ରହିବ ଯେଉଁମାନଙ୍କର ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା ଗୁଡ଼ିକ ଅପରିମେୟ । π, $\sqrt{\pi}$, $\pi+\sqrt{2}$, π+e, $\pi^{\sqrt{2}}$ ଇତ୍ୟାଦି ଆହୁରି ଜଟିଳ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅଛନ୍ତି, ଯେଉଁ ମାନଙ୍କୁ $\overleftrightarrow{X'X}$ ରେଖା ଉପରେ ସୂଚିତ କରିବା କଷ୍ଟକର ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠେ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ସରଳରେଖାସ୍ଥ ($\overleftrightarrow{X'X}$) ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଇବ କି ?

ଏ ପ୍ରଶ୍ନର ଉତ୍ତର ଏ ପୁସ୍ତକର ପରିସରଭୁକ୍ତ ନୁହେଁ । ତେଣୁ ନିମ୍ନ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଟିକୁ ଗ୍ରହଣ କରିବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍ ଓ ଏକ ସରଳରେଖାର ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍‌ଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ; ଅର୍ଥାତ୍ ଦୁଇ ସେଟ୍ ମଧ୍ୟରେ ଏକୈକ (ଏକ - ଏକ) ସଂପର୍କ ରହିଛି ।

2.9.2 ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର କ୍ରମ (Order in R) :

ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା a ଓ b ମଧ୍ୟରେ ଗୋଟିଏ ଅନ୍ୟଠାରୁ ବଡ଼, କିମ୍ବା ସାନ ହୋଇପାରେ । ରାଶିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଏହି ତୁଳନାତ୍ମକ ସଂପର୍କ ସେମାନଙ୍କର କ୍ରମ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିଥାଏ । ଏହାକୁ $a > b$ ବା $a < b$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ଯଦି $a > b$ ହୁଏ, ତାହାହେଲେ a ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ବିନ୍ଦୁଟି $\overleftrightarrow{X'X}$ ସଂଖ୍ୟାରେଖାର bର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହିବ । ଏହିପରି ବିଭିନ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ତୁଳନା କରି, ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଆମେ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ପାରିବା ।

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ : ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ କ୍ରମ ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରିବା ପାଇଁ କେତୋଟି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ (Axioms) ଦିଆଗଲା ।

a, b, c ତିନୋଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ।

1. **a, b ଦୁଇଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ, ହୁଏତ $a > b$ ବା $a < b$ ବା $a = b$ ହୋଇପାରେ । ଏହାକୁ ତ୍ରିମୁଖୀ ନିୟମ (Law of Trichotomy) କୁହାଯାଏ ।**
2. **a, b, c ତିନୋଟି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରେ, $a < b$ ଏବଂ $b < c$ ହେଲେ $a < c$ ହେବ । ଏହାକୁ ସଂକ୍ରମୀ ନିୟମ (Law of Transitivity) କୁହାଯାଏ ।**

3. **$a < b$ ଏବଂ $c > 0$ ହେଲେ, $ac < bc$ ହେବ ।**

4. **ଯଦି $a < b$ ହୁଏ, ତେବେ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା c ପାଇଁ $a + c < b + c$ ହେବ ।**

5. **$a > 0$ ଓ $b > 0$ ହେଲେ, $ab > 0$ ।**

ଏହି ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗ କରି କେତୋଟି ପ୍ରମେୟର ପ୍ରମାଣ ଦେଖିବା ।

(1) $a > b$ ଏବଂ $c > d$ ହେଲେ, $a + c > b + d$

(2) $a < b$ ଏବଂ $c < 0$ ହେଲେ, $ac > bc$

ପ୍ରମାଣ : (1) $a > b$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow a + c > b + c$ .... (i) (ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 4)

ପୁନଶ୍ଚ $c > d$ (ଦତ୍ତ)

$\Rightarrow b + c > b + d$ .... (ii) (ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 4)

(i) ଓ (ii) ରୁ ପାଉଁ $a + c > b + c > b + d$

$\therefore a + c > b + d$ (ପ୍ରମାଣିତ)

(2) $c < 0$ (ଦତ୍ତ) $\Rightarrow -c > 0$

ପୁନଶ୍ଚ $a < b$ (ଦତ୍ତ) $\Rightarrow b - a > 0$

$\therefore b - a > 0, -c > 0$

ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ - 5 ଦ୍ୱାରା $(b - a)((-c) > 0$

$\Rightarrow -bc + ac > 0 \Rightarrow ac > bc$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : 1. a ଏକ ବାସ୍ତବ ଧନାତ୍ମକ ସଂଖ୍ୟା ଅର୍ଥାତ୍ $a > 0$ ହୁଏ ତେବେ a, ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ 0 (ଶୂନ)ର ଡାହାଣକୁ ରହେ । ଯଦି a ଏକ ଋଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଅର୍ଥାତ୍ $a < 0$ ହୁଏ, ତେବେ a, 0 (ଶୂନ)ର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ରହେ ।

2. ଶୂନ ଏକମାତ୍ର ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯାହା ଧନାତ୍ମକ ବା ଋଣାତ୍ମକ ନୁହେଁ ।

2.9.3 ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଦୁଇବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା

ଦୂରତା ଏକ ଦୈର୍ଘ୍ୟର ମାପ । ଏହି ମାପ କେବେ ହେଲେ ଋଣାତ୍ମକ ହୋଇପାରିବ ନାହିଁ । କୌଣସି ସରଳରେଖା ଉପରେ P ଓ Q ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତାକୁ PQ ଲେଖାଯାଏ । ଅନ୍ୟପ୍ରକାରରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ, $\overline{PQ}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ PQ ହେବ ।

ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ କିପରି ସ୍ଥାପନ କରାଯାଇପାରିବ, ତାହା ଆମେ ପୂର୍ବ ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଆଲୋଚନା କରିସାରିଛେ । ବସ୍ତୁତଃ ଏହା ଏକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ପ୍ରଣାଳୀ (Co-ordinate System) । ଏହି ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିକୁ **ରୈଖିକ ଜ୍ୟାମିତି (Geometry of line)** କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ P ଓ Q ଦୁଇଟି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ 4 ଓ 6 ହୁଏ, ତେବେ P ଓ Q ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 4–6 ବା 6–4 ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ –2 ବା 2 ହେବ । କିନ୍ତୁ –2 ଓ 2 ଉଭୟଙ୍କର ସାଂଖ୍ୟିକ ମୂଲ୍ୟ 2 ଅଟେ । –2 ଓ 2 ର ସାଂଖ୍ୟିକ ମାନ ଅଣଋଣାତ୍ମକ ଓ ଏହି ସାଂଖ୍ୟିକ ମୂଲ୍ୟକୁ $|-2|$ ଓ $|2|$ ଲେଖାଯାଏ ।

ଏଠାରେ $|-2| = |2| = 2$

ଅର୍ଥାତ୍ ଧନାତ୍ମକ ହେଉ ବା ରଣାତ୍ମକ ହେଉ, ଯେ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା x ର ସାଂଖ୍ୟିକ ମାନକୁ ଆମେ $|x|$ ଭାବରେ ପ୍ରକାଶ କରୁ । **ଏହି $|x|$ ସର୍ବଦା ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ରାଶି ଓ ଏହାକୁ xର ପରମ ମାନ (Absolute Value) କୁହାଯାଏ ।** ଏହି ସାଂକେତିକ ଚିହ୍ନକୁ ବ୍ୟବହାରର କରି ଆମେ ଉପରୋକ୍ତ ଦୂରତାକୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ଲେଖିପାରିବା ।

$PQ = |6 - 4|$ ବା $PQ = |4 - 6|$

$\therefore PQ = 2$

ଅର୍ଥାତ୍ PQ = | P ଓ Q ର ସ୍ଥାନାଙ୍କଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର |

ତେଣୁ **ସଂଖ୍ୟାରେଖାସ୍ଥିତ P ଓ Q ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର ସାଂଖ୍ୟିକ ମାନ ବା ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଯଥାକ୍ରମେ a ଓ b ହେଲେ, ଦୂରତା $PQ = |a - b|$**

ତେଣୁ x ଧନାତ୍ମକ ବା ରଣାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{ଯେତେବେଳେ } x \geq 0 \\ -x, & \text{ଯେତେବେଳେ } x < 0 \end{cases}$$

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $x = 5$ ହେଲେ, $|x| = |5| = 5 = x$;

$x = 0$ ହେଲେ, $|x| = |0| = 0 = x$;

$x = -7$ ହେଲେ, $|x| = |-7| = 7 = -x$;

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : x ଯେ କୌଣସି ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ,

(i) $|x| = |-x| \geq 0$ (ii) $|x| \geq x$

(iii) $|x| \geq -x$ (iv) $|x| \leq a$ ହେଲେ, $-a \leq x \leq a$ ହେବ ।

(iv) ର ପ୍ରମାଣ :

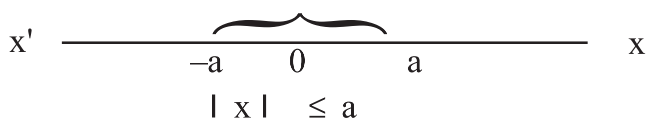
ପ୍ରଥମ ପରିସ୍ଥିତି : $x \geq 0$ ହେଲେ, $|x| = x$

$\therefore |x| \leq a \Rightarrow x \leq a$ ......(i)

ଦ୍ୱିତୀୟ ପରିସ୍ଥିତି : $x < 0$ ହେଲେ, $|x| = -x$

$\therefore |x| \leq a \Rightarrow -x \leq a \Rightarrow x \geq -a$ ......(ii)

$\therefore$ (i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇବା $-a \leq x \leq a$



(ଚିତ୍ର 2.7)

ଉଦାହରଣ - 6

ଏକ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ A ଓ B ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱୟ 3 ଏବଂ –7 ହେଲେ, AB କେତେ ?

ସମାଧାନ : AB = $\overline{AB}$ ର ଦୈର୍ଘ୍ୟ

$= |3 - (-7)| = |3 + 7| = |10| = 10$

ଅଥବା AB $= |-7 - 3| = |-10| = 10$ ଏକକ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ -7 : $|3x - 2| = 4$ ସମାଧାନ କର ।

ସମାଧାନ : ଯଦି $3x - 2 \geq 0$ ହୁଏ, ତେବେ $|3x - 2| = 3x - 2$ ହେବ,

$\therefore\ 3x - 2 = 4 \Rightarrow 3x = 4 + 2$

$\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$

ଯଦି $3x - 2 < 0$ ହୁଏ, ତେବେ $|3x - 2| = -(3x - 2)$ ହେବ,

$\therefore\ -(3x - 2) = 4 \Rightarrow -3x + 2 = 4$

$\Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{3}$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ $= \{\frac{-2}{3}, 2\}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : $|x| < 5$ ହେଲେ x ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ସଂଜ୍ଞାନୁସାରେ |x| = x, ଯଦି $x \geq 0$ ଏବଂ

–x, ଯଦି $x < 0$

ଯଦି x ଧନାତ୍ମକ ହୁଏ ତାହେଲେ $x < 5$...................... (i)

ଯଦି x ଋଣାତ୍ମକ ହୁଏ ତାହେଲେ $-x < 5$ କିମ୍ବା $x > -5$...................... (ii)

ତେଣୁ (i) ଓ (ii) ରୁ ପାଇବା $-5 < x < 5$ (ଉତ୍ତର)

ବିଶ୍ଳେଷଣ :ଯଦି x ର ମାନ 5 ଠାରୁ ବଡ଼ ଅର୍ଥାତ୍ 6 ହୁଏ,

ତେବେ $|x| = |6| = 6$, ଯାହାକି $|x| < 5$ ସର୍ତ୍ତକୁ ବିରୋଧ କରିବ ।

ଯଦି x ର ମାନ –5 ଠାରୁ କମ୍ ଅର୍ଥାତ୍ –6 ହୁଏ,

ତେବେ $|x| = |-6| = 6$, ଯାହାକି ପୂର୍ବଭଳି $|x| < 5$ ସର୍ତ୍ତକୁ ବିରୋଧ କରିବ ।

କିନ୍ତୁ –5 ଠାରୁ ଆରମ୍ଭ କରି 5 ରେ ଶେଷ କଲେ, ଯେଉଁ ସମସ୍ତ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ରହିଲା, ତାହା $|x| \leq 5$ ସର୍ତ୍ତକୁ ସିଦ୍ଧ କରିବ । ତେଣୁ $|x| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$

ଉଦାହରଣ - 9 : $|3x - 2| \leq 5$ ହେଲେ, xର ସମସ୍ତ ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ - (iv) ରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସୂତ୍ର ଅନୁସାରେ $|3x - 2| \leq 5$ ହେଲେ,

$-5 \leq 3x - 2 \leq 5$

$\Rightarrow\ -5+2 \le (3x-2)+2 \le 5+2$

$\Rightarrow\ -3 \le 3x \le 7$

$\Rightarrow$ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, $-1 \le x \le \frac{7}{3}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 : $|3x-2| > 5$ ଅସମୀକରଣଟି ସମାଧାନ କର।

ସମାଧାନ :- ଉଦାହରଣ -9 ରେ $|3x-2| \le 5$ ଅସମୀକରଣଟିର ସମାଧାନ କରାଯାଇଛି।

$|3x-2| \le 5$ ର ଠିକ୍ ବିପରିତ ଉକ୍ତିଟି $|3x-2| > 5$। ସୁତରାଂ ଉଦାହରଣ -9 ରେ ମିଳିଥିବା ଉତ୍ତରର ବିପରିତ ଦତ୍ତ ଅସମୀକରଣଟିର ସମାଧାନ ହେବ।

ଅତଏବ $|3x-2| > 5$ ର ସମାଧାନ $x > \frac{7}{3}$ କିମ୍ବା $x < -1$।

2.10 ଘାତଙ୍କ ରାଶି (Exponential numbers) :

a ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ n ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ a^n ର ଅର୍ଥ a x a x a x a x ..... (n ଥର) ଅଟେ। a^n ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର କାରଣ ହେଲା ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍‌ରେ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ସଂବୃତ୍ତି ନିୟମାଧୀନ।

a^n ରୂପକୁ ଘାତାଙ୍କ ରୂପ (exponential form) କୁହାଯାଏ। ଯେଉଁଠାରେ a ଆଧାର (base) ଓ n ଘାତାଙ୍କ। ଏଠାରେ **n = 0** ହେଲେ $\mathbf{a^0 = 1}$ ଓ ଏଠାରେ $\mathbf{a \neq 0}$। ଏହା ଏକ ସଂଜ୍ଞା।

ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, $a \neq 0$ ହେଲେ, $a^{-1} = \frac{1}{a}$ ଏବଂ $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ $(a \neq 0, m \in N)$

a^n ଘାତାଙ୍କ ରୂପରେ a ଅଣଶୂନ୍ୟ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଘାତାଙ୍କ n ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା $(n \in Z)$ ହେଲେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ ଗୁଡ଼ିକ ଅଧ୍ୟୟନ କରିଛ।

$$\left.\begin{array}{ll}(i)\ a^m \times a^n = a^{m+n} & (ii)\ a^m \div a^n = a^{m-n} \\ (iii)\ (ab)^m = a^m \times b^m & (iv)\ (a^m)^n = a^{mn}\end{array}\right\} \quad ....(1)$$

ଯେଉଁଠାରେ $a, b \in R$ ଓ $a \neq 0, b \neq 0, m, n \in Z$

$x^n = a\ (x \in R, n \in N)$ ହେଲେ ଆମେ x କୁ a ର n-ତମ ମୂଳ (n-th root) ବୋଲି କହୁ। କୌଣସି ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା a ର n ତମ ମୂଳ ରୂପେ ଆମେ ନିଶ୍ଚୟ ଗୋଟିଏ ଧନାତ୍ମକ ମୂଳ ପାଇବା ଓ ଏହି n-ତମ ମୂଳକୁ $\sqrt[n]{a}$ ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରିପାରିବା। ସେହି ଦୃଷ୍ଟିରୁ a ର ବର୍ଗମୂଳ ଏବଂ a ର ଘନମୂଳକୁ ଯଥାକ୍ରମେ $\sqrt{a}$ ଓ $\sqrt[3]{a}$ ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ। '$\sqrt{\ }$' ଚିହ୍ନକୁ କରଣୀ (radical) ଚିହ୍ନ କୁହାଯାଏ।

$\sqrt{a}$ ଓ $\sqrt[3]{a}$ କୁ ମଧ୍ୟ ଯଥାକ୍ରମେ $a^{\frac{1}{2}}$ ଏବଂ $a^{\frac{1}{3}}$ ରୂପେ ଲେଖାଯାଇପାରିବ। ବ୍ୟାପକ ଭାବେ q ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $a^{\frac{1}{q}}$ ଏକ ଧନାତ୍ମକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାକୁ a ର qତମ ମୂଳ (qth root) କୁହାଯାଏ।

$a^{\frac{1}{q}}$ ରାଶିକୁ p ଥର ଗୁଣନ କଲେ ପାଇବା : $a^{\frac{1}{q}} \times a^{\frac{1}{q}} \times .....$ (p ଥର) $= a^{\frac{p}{q}}$

ଏହି ଦୃଷ୍ଟିରୁ ଘାତାଙ୍କ ରାଶିରେ ଘାତାଙ୍କକୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ଆଧାରକୁ ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଭାବେ ଚିନ୍ତାକଲେ ଆମେ ଦେଖି ପାରିବା ଯେ, ପରିମେୟ ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ (1) ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ନିୟମ ଗୁଡ଼ିକ n ଓ m ପରିମେୟ ରାଶି ହେଲେ ମଧ୍ୟ ସତ୍ୟ ହେବେ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା : $a^{\frac{p}{q}} = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ ଏବଂ $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$

ଯଦି ଘାତାଙ୍କ n ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, ତେବେ ମଧ୍ୟ ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ (1) ସତ୍ୟ। ମାତ୍ର ଏହାକୁ ବିଶଦ ଭାବେ ଆଲୋଚନା କରିବା ଏହି ପୁସ୍ତକର ପରିସରର ବର୍ହିଭୂକ୍ତ । ତେଣୁ ବାସ୍ତବ ଘାତାଙ୍କ ପାଇଁ (1) ରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ନିୟମ ଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ରୂପେ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଉଛି।

ଉଦାହରଣ - 11 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘାତାଙ୍କ ରାଶିର ମାନ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $4^{-\frac{5}{2}}$ (ii) $343^{\frac{1}{3}}$ (iii) $\left(8^{\frac{-3}{4}}\right)^{\frac{4}{9}}$ (iv) $(0.125)^{\frac{1}{3}}$ (v) $(1024)^{1.2}$

ସମାଧାନ :- (i) $4^{-\frac{5}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^{-5} = 2^{-5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

(ii) $343^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{343} = \sqrt[3]{7^3} = 7$

(iii) $\left(8^{\frac{-3}{4}}\right)^{\frac{4}{9}} = 8^{\frac{-3}{4}\times\frac{4}{9}} = 8^{-\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8^{-1}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$

(iv) $(0.125)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\frac{125}{1000}} = \sqrt[3]{\left(\frac{5}{10}\right)^3} = \frac{5}{10} = 0.5$

(v) $(1024)^{1.2} = (1024)^{\frac{12}{10}} = \left(\sqrt[10]{1024}\right)^{12} = \left(\sqrt[10]{2^{10}}\right)^{12} = 2^{12} = 4096$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$ ହେତୁ ଏଠାରେ ଲେଖିପାରିବା : $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p$

ଉଦାହରଣ - 12 : $\frac{2\sqrt{3}+3}{5\sqrt{3}+1} = x + y\sqrt{3}$, ଓ x ଓ y ପରିମେୟ ହେଲେ x ଓ y ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ : $x + \sqrt{3}.y = \frac{2\sqrt{3}+3}{5\sqrt{3}+1} = \frac{(2\sqrt{3}+3)(5\sqrt{3}-1)}{(5\sqrt{3}+1)(5\sqrt{3}-1)}$

(ଲବ ଓ ହରକୁ $(5\sqrt{3}-1)$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ହରରେ ଥିବା ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଅପସାରିତ ହୁଏ। ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ ହରର ପରିମେୟ କରଣ (rationalization) କୁହାଯାଏ ।)

$\Rightarrow x + \sqrt{3}\ .\ y = \frac{30 - 2\sqrt{3} + 15\sqrt{3} - 3}{75 - 1} = \frac{27 + 13\sqrt{3}}{74} = \frac{27}{74} + \frac{13}{74} \times \sqrt{3}$

ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ତୁଳନା କଲେ $x = \frac{27}{74}$ ଓ $y = \frac{13}{74}$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 : ସରଳ କର:-

(i) $\left(\frac{1}{27}\right)^{0.\bar{3}} \times \left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$ (ii) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{2}{3}} \times \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1}$

ସମାଧାନ : (i) ଏଠାରେ $\frac{1}{27} = \left(\frac{1}{3}\right)^3$, $0.\bar{3} = \frac{1}{3}$ ଏବଂ $3\frac{3}{8} = \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ରାଶି $= \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^3\right\}^{\frac{1}{3}} \times \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^3\right\}^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{3} \times \frac{4}{9} = \frac{4}{27}$ (ଉତ୍ତର)

(ii) ଦତ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶ $= \left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{2}{3}} \times \left(1\frac{1}{3}\right)^{-1} = \sqrt{\frac{4}{9}} \times (4^3)^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{4}{3}\right)^{-1}$

$= \frac{2}{3} \times \left(\sqrt[3]{4^3}\right)^2 \times \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times 4^2 \times \frac{3}{4} = 8$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : $\left\{\frac{\sqrt[3]{24} \times \sqrt{24} \times \sqrt{32}}{\sqrt[3]{12} \times \sqrt{18}}\right\} x = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{3}}$ ହେଲେ x ର ମୂଲ୍ୟ ସ୍ଥିରକର ।

ସମାଧାନ : x ର ସହଗ $= \frac{2\sqrt[3]{3} \times 2\sqrt{6} \times 4\sqrt{2}}{\sqrt[3]{12} \times 3\sqrt{2}} = \frac{2(3)^{\frac{1}{3}} \times 2 \times (2)^{\frac{1}{2}} (3)^{\frac{1}{2}} \times 4(2)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times 3 \times 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{16}{3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}}}$

$\Rightarrow \frac{16x}{3^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{1}{6}}} = \frac{2^{\frac{5}{6}}}{3^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 16x = \frac{2^{\frac{5}{6}} \times 2^{\frac{1}{6}} \times 3^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}}$

$\Rightarrow x = \frac{2^{\frac{1}{6}} \times 2^{\frac{5}{6}}}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : ସରଳ କର : (i) $\left|\frac{\sqrt{31}-\sqrt{11}}{\sqrt{31}+\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{31}+\sqrt{11}}{\sqrt{31}-\sqrt{11}}\right|$ (ii) $\left|\frac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}\right|$

ସମାଧାନ : (i) $x = \frac{\sqrt{31}-\sqrt{11}}{\sqrt{31}+\sqrt{11}} - \frac{\sqrt{31}+\sqrt{11}}{\sqrt{31}-\sqrt{11}}$

$\Rightarrow x = \frac{\left(\sqrt{31}-\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{31}+\sqrt{11}\right)^2}{\left(\sqrt{31}\right)^2 - \left(\sqrt{11}\right)^2}$

$x = \frac{31+11-2\sqrt{31 \times 11} - 31 - 11 - 2\sqrt{31 \times 11}}{31-11} = \frac{-4\sqrt{341}}{20} = -\frac{\sqrt{341}}{5}$

$\therefore |x| = \frac{\sqrt{341}}{5}$ । (ଉତ୍ତର)

(ii) $\left|\frac{\sqrt{6}-\sqrt{7}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}\right| = \frac{\left|\sqrt{6}-\sqrt{7}\right|}{\sqrt{6}+\sqrt{7}}$ $(\because \sqrt{6}+\sqrt{7} > 0)$

$= \frac{\sqrt{7}-\sqrt{6}}{\sqrt{7}+\sqrt{6}}$ $(\because \sqrt{6}-\sqrt{7} < 0)$

$= \frac{\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)}{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}-\sqrt{6}\right)} = \frac{7+6-2\sqrt{42}}{7-6} = 13 - 2\sqrt{42}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଉତ୍ତର ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛ।

(i) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଠିକ୍ ?

(a) $\sqrt{4}$ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା। (b) $\sqrt{2}$ ଓ $\sqrt{3}$ ମଧ୍ୟରେ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ନାହିଁ।

(c) $\sqrt{8}$ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା। (d) $\pi \in Q$

(ii) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଠିକ୍ ନୁହେଁ ?

(a) p ଓ q ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ହେଲେ p+q ଅପରିମେୟ ।

(b) p ଓ q ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ଅପରିମେୟ ହେଲେ p+q ଅପରିମେୟ

(c) p ଓ q ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ହେଲେ p+q ପରିମେୟ

(d) p ଓ q ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ପରିମେୟ ହେଲେ p-q ପରିମେୟ

(iii) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଠିକ୍ ?

(a) p ଓ q ପରିମେୟ ହେଲେ pq ପରିମେୟ

(b) p ଓ q ଅପରିମେୟ ହେଲେ pq ଅପରିମେୟ

(c) p ପରିମେୟ ଓ q ଅପରିମେୟ ହେଲେ pq ପରିମେୟ।

(d) p ଓ q ଅପରିମେୟ ହେଲେ $\frac{p}{q}$ ଅପରିମେୟ।

(iv) ରାଡ଼ିକାଲ (କରଣୀ) ଚିହ୍ନ ବ୍ୟବହାର କଲେ $2^{\frac{1}{2}}$ ରାଶି ଟି କାହା ସହ ସମାନ ?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt[3]{2}$ (c) $\sqrt{8}$ (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ

(v) ରାଡ଼ିକାଲ ଚିହ୍ନ ଅପସାରଣ କଲେ $\frac{1}{2\sqrt[5]{x^{-3}}}$ ରାଶିର ସରଳୀକୃତ ମାନ କେଉଁଟି ?

(a) $\frac{x^{\frac{3}{5}}}{2}$ (b) $\frac{1}{2x^{-15}}$ (c) $\frac{x^{15}}{2}$ (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ

(vi) $9^{-1\frac{1}{2}}$ ରାଶିଟି କେଉଁ ରାଶି ସହ ସମାନ ?

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $3\frac{1}{3}$ (c) $\frac{1}{9}$ (d) $\frac{1}{27}$

(vii) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}}$ ର ମୂଲ୍ୟ କାହା ସହ ସମାନ ?

(a) $\sqrt{2}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) 2

(viii) କେଉଁଟି ଠିକ୍ ?

(a) $\sqrt[4]{4} > \sqrt[3]{3}$ (b) $\sqrt[3]{4} > \sqrt[4]{3}$ (c) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[4]{3}$ (d) $\sqrt[4]{4} = \sqrt[3]{3}$

(ix) Q ସମସ୍ତ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା Q' ସମସ୍ତ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ $Q \cup Q' =$?

(a) N (b) Z (c) R (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ।

(x) ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ x ର ମୂଲ୍ୟ କେଉଁଟି ହେଲେ $(\sqrt{5}+\sqrt{2})$ x ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ?

(a) $\sqrt{5}+\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{5}-\sqrt{2}$ (c) $\sqrt{5}$ (d) $\sqrt{2}$

(xi) $x+(1-\sqrt{2})$ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଉଥିଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମୂଲ୍ୟରୁ xର ମୂଲ୍ୟଟି ବାଛ।

(a) $1-\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{2}-1$ (c) $-1-\sqrt{2}$ (d) $2\sqrt{2}$

(xii) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ ସଂଖ୍ୟାଟି ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସହ ସମାନ ନୁହେଁ ?

(a) $\frac{4}{\sqrt{6}}$ (b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ (c) $\frac{2}{\sqrt{6}}$ (d) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{18}}$

(xiii) $3\sqrt{2}$ ଓ $7\sqrt{8}$ ର ଯୋଗଫଳ କେତେ ?

(a) $12\sqrt{2}$ (b) $10\sqrt{2}$ (c) $10\sqrt{8}$ (d) ଏଥିରୁ କେଉଁଟି ନୁହେଁ।

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଉକ୍ତି ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁଗୁଡ଼ିକ ସତ୍ୟ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଚିହ୍ନଟ କର।

(i) $0 \in R$ (ii) $\sqrt{16} \in Q$ (iii) $\sqrt{5} \in R$ (iv) $-0 = 0$

(v) $-\pi \in Q$ (vi) $2\pi \in Q'$ (vii) $2+\sqrt{2} \in Q$ (viii) $Q \subset R$

(ix) $\pi \in Q'$ (x) $Q \cup Q' = R$ (xi) $Q \subset Q'$ (xii) $R - Q = Q'$

(xiii) $\sqrt{2}$ ଓ $\sqrt{3}$ ମଧ୍ୟରେ ଅସୀମ ସଂଖ୍ୟକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ବିଦ୍ୟମାନ ।

(xiv) 0.01001000100001.... ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ।

(xv) $x \in R$ ହେଲେ, $x \cdot \frac{1}{x} = 1$

(xvi) ଦୁଇଗୋଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ପରିମେୟ ।

(xvii) ଦୁଇଟି ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ଅପରିମେୟ ।

(xviii) ଦୁଇଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଯୋଗଫଳ ପରିମେୟ ।

(xix) ଦୁଇଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ ଅପରିମେୟ ।

(xx) π ସହ ଯେ କୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କଲେ ଯୋଗଫଳ ଅପରିମେୟ ।

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ରାଶିମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ ପରିମେୟ ଓ କେଉଁଗୁଡ଼ିକ ଅପରିମେୟ ଲେଖ ।

(i) 3 (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) -10 (iv) $\sqrt{81}$ (v) $\frac{22}{7}$

(vi) π (vii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (viii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ix) 0.7 (x) $0.\bar{7}$

(xi) $\sqrt{0.7}$ (xii) 0.07007000700007......

4. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର :

(i) 2 ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ .... ।

(ii) $\sqrt{2}$ ରଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ .... ।

(iii) $\sqrt{2}$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ .... ।

(iv) π ର $\frac{22}{7}$ ଏକ .... ମାନ ଅଟେ ।

(v) $4-\sqrt{3}$ ର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ....

(vi) ......ର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଓ ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀର ସମଷ୍ଟି ଶୂନ ଅଟେ ।

(vii) px = py ହେଲେ x = y ହେବ କେବଳ ଯଦି ......

(viii) $Q \cup Q' =$ ....

(ix) $-\pi$ ର ପରମ ମାନ .... ।

(x) x = 0 ହେଲେ $|x|$ ର ମାନ ....

5. 'କ' ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ 'ଖ' ସ୍ତମ୍ଭରେ ଥିବା ପଦ ସହ (ଅର୍ଥ ଭିତ୍ତିକ) ମିଳାଇ ରଖ ।

(କ)	(ଖ)
(i) 0	(i) ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ
(ii) 1	(ii) ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା
(iii) $\sqrt{2}$	(iii) ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା
(iv) 5	(iv) ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା
(v) 6	(vi) ଆସନ୍ନମାନ $\frac{22}{7}$
(vi) $0.\overline{7}$	(vi) ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ
(vii) x ଓ – x	(vii) ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ
(viii) 2 ଓ $\frac{1}{2}$	(viii) ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା $\frac{p}{q}$
(ix) π	(ix) ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ

6. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ଉଦାହରଣ ଦିଅ ।

(i) x ଓ y ଅପରିମେୟ ମାତ୍ର x+ y ପରିମେୟ । (ii) x ଓ y ଅପରିମେୟ ଓ x + y ଅପରିମେୟ

(iii) x ଓ y ଅପରିମେୟ ମାତ୍ର x– y ପରିମେୟ (iv) x ଓ y ଅପରିମେୟ ମାତ୍ର xy ପରିମେୟ

(v) x ଓ y ଅପରିମେୟ ଓ xy ଅପରିମେୟ (vi) x ଓ y ଅପରିମେୟ ମାତ୍ର $\frac{x}{y}$ ପରିମେୟ

(vii) x ଓ y ଅପରିମେୟ ଓ $\frac{x}{y}$ ଅପରିମେୟ

7. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) କେଉଁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ତା' ନିଜର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଅଟେ ?

(ii) କେଉଁ ବାସ୍ତବସଂଖ୍ୟା ତା' ନିଜର ଗୁଣନାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ଅଟେ ?

(iii) $a \times 0 = b \times 0$ ହେଲେ ସର୍ବଦା a = b ହେବ କି ? କାରଣ ସହ ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(iv) ଦୁଇଗୋଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ଯେପରି ସେମାନଙ୍କ ଗୁଣଫଳ ପରିମେୟ ମାତ୍ର ଯୋଗଫଳ ଅପରିମେୟ ହେବ ।

(v) ଦୁଇଗୋଟି ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖ ଯେପରି ସେମାନଙ୍କ ଯୋଗଫଳ ପରିମେୟ ମାତ୍ର ଗୁଣନଫଳ ଅପରିମେୟ ହେବ ।

(vi) ଏକ ପରିମେୟ ଭଗ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ଦଶମିକ ଓ ଏକ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟାର ଦଶମିକ ରୂପରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ କ'ଣ ଥାଏ ?

8. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଯୋଗଫଳ ସ୍ଥିର କର :

(i) $\sqrt{18}$ ଓ $\sqrt{72}$ (ii) $3\sqrt{2}$ ଓ $7\sqrt{2}$ (iii) $\sqrt{5}$ ଓ $-\sqrt{5}$ (iv) $\sqrt{75}, \sqrt{108}$ ଓ $\sqrt{147}$

9. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କର :

(i) $\sqrt{5}$ ଓ $\sqrt{2}$ (ii) $\sqrt{20}$ ଓ $\sqrt{5}$ (iii) $3+\sqrt{2}$ ଓ $3-\sqrt{2}$ (iv) $\sqrt{12}, \sqrt{45}$ ଓ $\sqrt{15}$

10. ନିମ୍ନଲିଖିତ ରାଶିମାନଙ୍କୁ x ସହ ଗୁଣନ କଲେ ଯଦି ଗୁଣଫଳ 1 (ଏକ) ତେବେ x ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯେପରିକି x ର ହର ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହେବ ।

(i) $\sqrt{3}$ (ii) $3\sqrt{2}$ (iii) $2+\sqrt{3}$ (iv) $\sqrt{5}-1$ (v) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$

11. 0.303003000300003.... ଦଶମିକ ରାଶିଟି ପରିମେୟ କି ଅପରିମେୟ କାରଣ ସହ ଲେଖ ।

12. P ଓ Q ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟ ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଡ଼ି ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହେଲେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ର ପାଇଁ PQ ଦୂରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 8 ଓ 15 (ii) –4 ଓ 3.2 (iii) –3.7 ଓ – 6.1 (iv) π ଓ -3π

13. ନିମ୍ନଲିଖିତ ରାଶିମାନଙ୍କୁ ପରିମେୟ ହର ବିଶିଷ୍ଟ ରାଶିରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(i) $\frac{2}{3(\sqrt{3}+2)}$ (ii) $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ (iii) $\frac{2}{\sqrt{2}+3}$ (iv) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$ (v) $\frac{5}{3-\sqrt{2}}$

(vi) $\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ (vii) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$ (viii) $\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (ix) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

14. ସରଳ କର :

(i) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$ (ii) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$

15. a ଓ b ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସେମାନଙ୍କ ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=a+b\sqrt{3}$ (ii) $\frac{4+\sqrt{5}}{4-\sqrt{5}}=a+b\sqrt{5}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{8}}=a+b\sqrt{6}$

16. ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଅଙ୍କନ କରି କମ୍ପାସ୍ ଓ ସ୍କେଲ୍‌ର ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା ନିମ୍ନଲିଖିତ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ସଂଖ୍ୟା ରେଖାରେ ଚିହ୍ନଟ କର ।

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $1\frac{1}{3}$ (iii) $\sqrt{2}-1$ (iv) $\sqrt{2}+1$ (v) $2+\sqrt{3}$ (vi) $\sqrt{5}$ (vii) $\sqrt{3}-1$

17. ସଂଖ୍ୟାରେଖାରେ ନିମ୍ନ ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କୁ ସ୍ଥାପନ କରି କେଉଁଟି ବୃହତ୍ତର ସ୍ଥିର କର ।

(i) $-\sqrt{3}$ ଓ $-\sqrt{2}$ (ii) $\frac{3}{4}$ ଓ $\frac{2}{3}$ (iii) $\sqrt{2}$ ଓ $1\frac{1}{2}$ (iv) 1.7 ଓ $\sqrt{3}$

18. ସରଳ କର : $\left|\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}-\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right|$

19. ଉଦାହରଣ ନେଇ ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କର (ଯେଉଁଠାରେ x ଓ y ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା) ।

(i) $|x+y| \le |x|+|y|$ (ii) $|x-y| \ge \big||x|-|y|\big|$

20. ସରଳ କର

(i) $\left(\left(\sqrt[n]{a}\right)^{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$; $a > 0$ ଓ $n \in N$ (ii) $\left(\sqrt[3]{3}^{\sqrt[3]{3}}\right)^{\sqrt[3]{3^2}}$ (iii) $27^{1\frac{1}{3}} \times \sqrt{\frac{1}{9}} \div 81^{-\frac{1}{4}}$

21. ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର

(i) $\left(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)$ $(a > 0, b > 0)$ (ସୂଚନା : $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କର ।)

(ii) $\left(1 - a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right)$ $(a > 0)$

(iii) $\left(1 + a^{\frac{1}{2}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{4}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{8}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{16}}\right)\left(1 + a^{\frac{1}{32}}\right)\left(1 - a^{\frac{1}{32}}\right)$ $(a > 0)$

(iv) $\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)\left(\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right)$ $(x > 0, y > 0)$

(ସୂଚନା : $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କର ।)

(v) $\left(x^{-1} + x^{\frac{-1}{2}}.y^{\frac{-1}{2}} + y^{-1}\right)\left(x^{-1} - x^{\frac{-1}{2}}.y^{\frac{-1}{2}} + y^{-1}\right)$ $(x > 0, y > 0)$

(ସୂଚନା : $(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) = a^4 + a^2b^2 + b^4$ ର ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କର ।)

22. ସରଳ କର ।

(i) $\sqrt[3]{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{1}{3}}} \div (xyz)^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\sqrt[3]{x^2y^4z^{-1}} \div \sqrt{x^{-\frac{2}{3}}y^2z^{-\frac{1}{3}}}$

$(x > 0, y > 0, z > 0)$

23. $\{x, y, z, a, b, c\} \subset R$ ଓ $x > 0, y > 0, z > 0$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $\sqrt{x^{-1}y} \times \sqrt{y^{-1}z} \times \sqrt{z^{-1}x} = 1$

(ii) $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$ $(a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0)$

(iii) $\left(x^{\frac{1}{a-b}}\right)^{\frac{1}{b-c}} \times \left(x^{\frac{1}{b-c}}\right)^{\frac{1}{c-a}} \times \left(x^{\frac{1}{c-a}}\right)^{\frac{1}{a-b}} = 1$ (a, b ଓ c ର ମୂଲ୍ୟ ଅସମାନ ।)

24. (i) $a = 2^{\frac{1}{3}} - 2^{-\frac{1}{3}}$ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $2a^3 + 6a = 3$

(ii) $a = x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$, $x > 0$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $a^3 + 3a = x - \frac{1}{x}$

25. x ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $3^{x+1} = 9$ (ii) $2^{2x+1} = 8$ (iii) $\left(\sqrt{2}\right)^{2x-1} = 1$

26. ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାର ସ୍ୱୀକାର୍ଯ୍ୟ ଓ ଆଲୋଚିତ ଅନ୍ୟ ଧର୍ମ ଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅଭେଦ ଗୁଡ଼ିକ ପ୍ରତିପାଦନ କର।

(i) $a(a-b) = a^2 - ab$

(ii) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(iii) $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(iv) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

(v) $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

(vi) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

27. $x \in R, x \neq 0, a,b, c \in R$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

$$\frac{1}{1+x^{b-a}+x^{c-a}}+\frac{1}{1+x^{c-b}+x^{a-b}}+\frac{1}{1+x^{a-c}+x^{b-c}}=1$$

28. ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ରରେ x ର ମାନ ନିରୂପଣ କର :

(i) $|x-3| = 7$ (ii) $|x + 1| = 11$

(iii) $|2x - 1| = 3$ (iv) $|3x + 4| = 5$

29. ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ରାଶିମାନଙ୍କୁ ପରିମେୟ ଓ ଅପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା ର ସମଷ୍ଟି ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କର।

(i) $\frac{3}{3+\sqrt{5}}$ (ii) $\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{8}}$ (iii) $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

30. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଅସମୀକରଣମାନଙ୍କୁ ସମାଧାନ କର।

(i) $|x| < \frac{1}{2}$ (ii) $|x| > 1$

(iii) $|3x| \leq 5$ (iv) $|2x| \geq 3$

(v) $|3x-1| \leq 7$ (vi) $|7x + 3| \geq 5$

ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଓ ଅଭେଦ

(ALGEBRAIC EXPRESSIONS AND IDENLITIES)

3.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ପ୍ରକାରର ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ (Expression) ଯାହା ସମ୍ପର୍କରେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ସମ୍ୟକ୍ ଧାରଣା ପାଇଛ । ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମିଶାଣ, ଫେଡ଼ାଣ, ଗୁଣନ ଓ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକ ବିଷୟରେ ମଧ୍ୟ ଧାରଣା ପାଇଛ । ଏତଦ୍‌ବ୍ୟତୀତ କେତେକ ଅଭେଦ ତଥା ଉକ୍ତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କିପରି ହୋଇଥାଏ ତାହା ମଧ୍ୟ ଜାଣିଛ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଅଧିକ କିଛି ଅଭେଦକୁ ଜାଣିବା ସହ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣରେ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ ଜାଣିବ । ତତ୍ ସହ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ଏବଂ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣରେ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ ସଂପର୍କରେ ମଧ୍ୟ ଅବଗତ ହେବ । ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଏବଂ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗ.ସା.ଗୁ ଏବଂ ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସହ କେତେକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶର ସରଳୀକରଣ ମଧ୍ୟ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଜାଣିବ ।

3.2 ମନୋମିଆଲ୍ (Monomial) :

ଯଦି $a\ (a \neq 0)$ ଏକ ଧ୍ରୁବକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା, x ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ଏବଂ n ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ ax^n ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶକୁ x ରେ n ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ମନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ a କୁ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ସହଗ (Coefficient) କୁହାଯାଏ । $3x^2$, $2\sqrt{2}$, $-7x^4$ ଇତ୍ୟାଦି ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ ।

ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ (Degree of the Monomial) :

କୌଣସି ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଘାତାଙ୍କକୁ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ କୁହାଯାଏ । ଯଥା : x, $2x$, $-\sqrt{3}x$ ଇତ୍ୟାଦି ଏକଘାତୀ ମନୋମିଆଲ୍ ଏବଂ $5x^2$, $-6x^3$, $32x^4$, $2\sqrt{2}x^5$ ଯଥାକ୍ରମେ ଦ୍ୱିଘାତୀ, ତ୍ରିଘାତୀ, ଚତୁର୍ଘାତୀ, ପଞ୍ଚଘାତୀ ମନୋମିଆଲ୍ ଅଟନ୍ତି ।

$1, \frac{2}{3}, 3, -2, \sqrt{3}$ ଇତ୍ୟାଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ । କାରଣ ଏଗୁଡ଼ିକୁ ଯଥାକ୍ରମେ $x^0, \frac{2}{3}x^0, 3x^0, -2x^0, \sqrt{3}x^0$, ରୂପରେ ଲେଖାଯାଇପାରେ । ତେଣୁ ଏଗୁଡ଼ିକୁ **ଶୂନଘାତୀ ମନୋମିଆଲ୍** କୁହାଯାଏ ।

ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ୍ (Like Monomials) :

ଯଦି ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି 'x' ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ ଦୁଇଟି ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ମନୋମିଆଲ୍ ସମାନ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ହୁଅନ୍ତି ତେବେ ସେମାନେ ସଦୃଶ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $2x$ ଓ $-\frac{5}{2}x$ ମନେମିଆଲ୍ ଦ୍ୱୟ ସଦୃଶ । କାରଣ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତାଙ୍କ 1 । ସେହିପରି $\frac{1}{2}x^2$, $-2x^2$ ଓ $\sqrt{3}x^2$ ମନୋମିଆଲ୍ ତ୍ରୟ ସଦୃଶ । କାରଣ ଏମାନେ ସମାନ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ।

ଶୂନ ମନୋମିଆଲ୍ (Zero Monomials) :

ସଂଖ୍ୟା 0 କୁ ax^n ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କରିହେବ ନାହିଁ, କାରଣ $0=0.x = 0.x^2 = 0.x^3 = ...$ । ତାହାହେଲେ 0 କୁ କେତେ ଘାତୀ ମନୋମିଆଲ୍ ବୋଲି କୁହାଯିବ ? ଏଥିପାଇଁ କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଉତ୍ତର ନଥିବାରୁ **0 ଏକ ବିଶେଷ ଧରଣର ମନୋମିଆଲ୍ ଯାହାକୁ ଶୂନ ମନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।**

3.3 ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Polynomial) :

କୌଣସି ଏକପଦୀ କିମ୍ବା ବହୁପଦୀ ପରିପ୍ରକାଶର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦ ଯଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ଉକ୍ତ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।

ଯଥା : $2+3x-4x^2$, $1+x^3$, $3x^{10}$ ଇତ୍ୟାଦି ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଅଟନ୍ତି ।

ଏଥିରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ ମଧ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି 'x' ରେ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ହୁଏ ତେବେ $p(x)$ ର ବ୍ୟାପକ ପରିପ୍ରକାଶ ହେଉଛି: $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$ । $a_0, a_1, a_2, ... a_{n-1}, a_n$ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ($a_n \neq 0$), n ଏକ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଓ x ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ହୁଏ ତେବେ $p(x)$ କୁ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ 'x' ର n- ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ । ସଂଜ୍ଞାରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ,

(i) $a_0, a_1x, a_2x^2 ... a_nx^n$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ ।

(ii) ଉକ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକ $p(x)$ର ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ପଦ (nomial) ।

(iii) a_0 ହେଉଛି $p(x)$ ର ଏକ ଧ୍ରୁବକ ପଦ (constant term)।

(iv) $a_0, a_1, a_2, a_3 .... a_n$ ଯଥାକ୍ରମେ $x^0, x^1, x^2, x^3 .... x^n$ ର ସହଗ (co-efficient) ।

ସହଗଗୁଡ଼ିକ ଯଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (rational number) ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ $p(x)$କୁ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯିବ । ସେହିପରି ସହଗଗୁଡ଼ିକ ଯଦି ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା ହୁଏ, ତେବେ $p(x)$କୁ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ,

(a) $2 + \frac{5}{2}x + \frac{7}{4}x^2$, $\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{8}$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ।

(b) $x^2 - x - 2$, $1 - 2x - 4x^2 + 3x^3$ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା କ୍ଷେତ୍ରରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ନାମକରଣ :

ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦସଂଖ୍ୟା ଅନୁସାରେ ତା'ର ନାମକରଣ କରାଯାଏ । $p(x)$ ର ପଦସଂଖ୍ୟା 1 ହେଲେ ତାହାକୁ **ଏକପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍** (Manomial) **,** ପଦସଂଖ୍ୟା ଦୁଇ ହେଲେ ସେହି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ଦ୍ୱିପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Binomial) ଏବଂ ପଦସଂଖ୍ୟା ତିନି ଥିଲେ ତାହକୁ **ତ୍ରିପଦୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍** (Trinomial) କୁହାଯାଏ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $4x$, x^2-5, $4-6x+7x^3$ ଯଥାକ୍ରମେ ମନୋମିଆଲ୍, ବାଇନୋମିଆଲ୍ ଓ ଟ୍ରାଇନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଉଦାହରଣ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: (i) ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଲେଖିଲାବେଳେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିରେଥିବା ସାନରୁ ବଡ କିମ୍ବା ବଡରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ଲେଖାଯାଏ । ଏହି **କ୍ରମ ଲିଖନକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର Standard Form ଲିଖନ** କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $x-2x^2+3x^3+1$ ର Standard form ଲିଖନ ହେଉଛି $3x^3-2x^2+x+1$ ବା $1+x-2x^2+3x^3$ ।

(ii) 'x' ରେ ବିଭିନ୍ନ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ମାନଙ୍କୁ ସାଧାରଣତଃ $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, $t(x)$ ଇତ୍ୟାଦି ସଂଙ୍କେତ ଦ୍ୱାରା ଲେଖାଯାଏ।

3.3.1. ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ (Degree of Polynomial) :

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଥିବା ଚଳରାଶି (x)ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତାଙ୍କକୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ କୁହାଯାଏ । $2x-3$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତାଙ୍କ 1। କାରଣ 'x' ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତାଙ୍କ 1 । ସେହିପରି x^2+2x+3 ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 2 । ତେଣୁ ଏହାକୁ ଦ୍ୱିଘାତୀ (Quadratic) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ଏବଂ $2x^3-x^2+7$ ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 3 ହେତୁ ଏହାକୁ ତ୍ରିଘାତୀ (cubic) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ । ପୁନଶ୍ଚ $3-2x+2x^2-x^4$ ର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 4 । ଫଳର ଏହା ଏକ ଚତୁଃଘାତୀ (Biquadratic ବା Quartic) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କୁହାଯାଏ ।

3.3.2 ଏକାଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ (Polynomial in more than one variable):

ଏହା ପୂର୍ବରୁ ଆମେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିଅଛେ । ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସମସ୍ତ ଧାରଣା ସବୁ ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ମଧ୍ୟ ସଂପ୍ରସାରିତ କରାଯାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $5x^2y^3$ ରେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ଓ y ର ଘାତାଙ୍କ ଅଣରଣାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ହୋଇଥିବାରୁ ଏହା ଏକ ମନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ । ସେହିପରି $x+xy+xy^2$ ମଧ୍ୟ x ଓ y ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ।

ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିରେ ଥିବା ଘାତାଙ୍କ ଗୁଡିକର ସମଷ୍ଟିକୁ ଉକ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ କୁହାଯାଏ । ଯଥା : $5x^2y^3$ ର ଘାତ = x ର ଘାତାଙ୍କ + y ର ଘାତାଙ୍କ = $2+3=5$

ସେହିପରି ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ହେଲେ, ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଦଗୁଡ଼ିକର ଘାତ ସ୍ଥିର କରିବାକୁ ପଡ଼େ । ସ୍ଥିରିକୃତ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ ହେବ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $x+xy+xy^2$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ବାମଆଡୁ ପ୍ରଥମ ପଦ x ର ଘାତ = 1, ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ xy ର ଘାତ = $1+1=2$ ଓ ତୃତୀୟ ପଦ xy^2 ର ଘାତ ହେଉଛି $1+2=3$ ।

ତେଣୁ ସମସ୍ତ ପଦମାନଙ୍କ ଘାତ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 3; ଯାହାକି ପ୍ରଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ ଅଟେ ।

ସେହିପରି $x+y^2+3x^2y^2$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଘାତ = 4

ଟୀକା : (i) x ଓ y ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ସାଧାରଣତଃ p(x,y), r(x,y), t(x,y) ଇତ୍ୟାଦି ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ ।

(ii) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ p(x,y,z) ସଂକେତ ଦ୍ୱାରା ମଧ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

3.4 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟାର ପୁନରାଲୋଚନା :

ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ହରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସଂଗଠିତ ହୁଏ ତାହା ତୁମେ ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଛ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ମନେ ପକାଇବା ।

3.4.1 ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ :

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ କିପରି କରାଯାଏ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛ । ଏଥିପାଇଁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ର ବଡ଼ରୁ ସାନ ଅଥବା ସାନରୁ ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ standard form ରେ ଲେଖାଯାଏ । ଯୋଗ ଓ ବିୟୋଗ କଲା ବେଳେ ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ ବା ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 1 :

$2x^3 - 5 + 3x^2 - 7x,\ 20x - 5x^2 + 3 - x^3$ ଓ $3x + 4x^3 - 7 + x^2$ ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

(a) ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$2x^3 + 3x^2 - 7x - 5$ (ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ)

$-x^3 - 5x^2 + 20x + 3$

$4x^3 + x^2 + 3x - 7$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ = $5x^3 - x^2 + 16x - 9$ (ଉତ୍ତର)

(b) ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ = $(2x^3 - 5 + 3x^2 - 7x) + (20x - 5x^2 + 3 - x^3) + (3x + 4x^3 - 7 + x^2)$

$= (2x^3 + 3x^2 - 7x - 5) + (-x^3 - 5x^2 + 20x + 3) + (4x^3 + x^2 + 3x - 7)$

(ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ରଖାଗଲା)

$= (2x^3 - x^3 + 4x^3) + (3x^2 - 5x^2 + x^2) + (-7x + 20x + 3x) + (-5 + 3 - 7)$

(ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ବାଛି ଏକତ୍ର ଲେଖାଯାଇଛି)

$= 5x^3 - x^2 + 16x - 9$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 :

$3x^4 + x^2 - 4,\ x^3 - 5x + 2$ ଓ $2x^4 + 3x^2 + 2x$ ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଏହି ତିନିଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ କୌଣସି ଗୋଟିକର ସମସ୍ତ ପଦର ସଦୃଶ ପଦ ଅନ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ନାହିଁ । ଏପରି ସ୍ଥଳେ କିପରି ଯୋଗ କରିବାକୁ ହେବ ଦତ୍ତ ଉଦାହରଣରୁ ଦେଖ ।

ସମାଧାନ : ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrrrr} 3x^4 & & +x^2 & & -4 \\ & x^3 & & -5x & +2 \\ 2x^4 & & +3x^2 & +2x & \\ \hline 5x^4 & +x^3 & +4x^2 & -3x & -2 \end{array}$$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ = $5x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ (ଉତ୍ତର)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (3x^4 + x^2 - 4) + (x^3 - 5x + 2) + (2x^4 + 3x^2 + 2x)$

$= (3x^4 + 2x^4) + x^3 + (x^2 + 3x^2) + (-5x + 2x) + (-4 + 2)$

$= 5x^4 + x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 3 :

$\frac{5}{2}x^3 - 3x + x^4 - \frac{1}{2}x^2$, $8 + 3x^4$, $-\frac{9}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2$ ଓ $\frac{13}{2}x^2 - 2x + 5$ କୁ ଯୋଗକର ।

ସମାଧାନ : ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrrrr} x^4 & +\frac{5}{2}x^3 & -\frac{1}{2}x^2 & -3x & \\ 3x^4 & & & & +8 \\ & -\frac{9}{2}x^3 & +\frac{11}{2}x^2 & & \\ & & \frac{13}{2}x^2 & -2x & +5 \\ \hline 4x^4 & -2x^3 & +\frac{23}{2}x^2 & -5x & +13 \end{array}$$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ = $4x^4 - 2x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 5x + 13$ (ଉତ୍ତର)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (\frac{5}{2}x^3 - 3x + x^4 - \frac{1}{2}x^2) + (8 + 3x^4) + (-\frac{9}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2) + (\frac{13}{2}x^2 - 2x + 5)$

$= (x^4 + \frac{5}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 3x) + (3x^4 + 8) + (-\frac{9}{2}x^3 + \frac{11}{2}x^2) + (\frac{13}{2}x^2 - 2x + 5)$

(ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖ୍)

$= (x^4 + 3x^4) + (\frac{5}{2}x^3 - \frac{9}{2}x^3) + (-\frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{2}x^2 + \frac{13}{2}x^2) + (-3x - 2x) + (8 + 5)$

(ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ର ସଜାଇ ରଖ୍)

$= 4x^4 - 2x^3 + \frac{23}{2}x^2 - 5x + 13$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4 : $7x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ ରୁ $4x^3 - 3 - 3x^2 + 2x$ କୁ ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ : ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrrr} 7x^3 & -2x^2 & +3x & -5 \\ 4x^3 & -3x^2 & +2x & -3 \\ - & + & - & + \\ \hline 3x^3 & +x^2 & +x & -2 \end{array}$$

(ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ତଳକୁ ତଳ ଲେଖି)

(ବିୟୋଗ କରାଯାଉଥିବା ରାଶିର ଚିହ୍ନ ବଦଳାଇ)

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ = $3x^3 + x^2 + x - 2$

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

$(7x^3 - 2x^2 + 3x - 5) - (4x^3 - 3 - 3x^2 + 2x)$

$= (7x^3 - 2x^2 + 3x - 5) - (4x^3 - 3x^2 + 2x - 3)$ (ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ)

$= (7x^3 - 2x^2 + 3x - 5) + \{-(4x^3 - 3x^2 + 2x - 3)\}$ $[\because a - b = a + (-b)]$

$= (7x^3 - 2x^2 + 3x - 5) + \{-4x^3 + 3x^2 - 2x + 3\}$ (ଫେଡ଼ାଯାଉଥିବା ରାଶିର ଚିହ୍ନ ବଦଳାଇ)

$= 7x^3 - 4x^3 - 2x^2 + 3x^2 + 3x - 2x - 5 + 3$ (ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ର ସଜାଇ ଲେଖି)

$= 3x^3 + x^2 + x - 2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 5 :

$2.5x^3 - 7 - 3.5x^2$ ରୁ $2.5x^2 + 1.5x^3 + 9 - 12x$ କୁ ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ : ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrrr} 2.5x^3 & - 3.5x^2 & & - 7 \\ 1.5x^3 & + 2.5x^2 & - 12x & + 9 \\ - & - & + & - \\ \hline x^3 & - 6x^2 & + 12x & - 16 \end{array}$$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ = $x^3 - 6x^2 + 12x - 16$

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ $= (2.5x^3 - 7 - 3.5x^2) - (2.5x^2 + 1.5x^3 + 9 - 12x)$

$= (2.5x^3 - 3.5x^2 - 7) - (1.5x^3 + 2.5x^2 - 12x + 9)$

$= (2.5x^3 - 3.5x^2 - 7) + \{-(1.5x^3 + 2.5x^2 - 12x + 9)\}$

$= (2.5x^3 - 3.5x^2 - 7) + \{-1.5x^3 - 2.5x^2 + 12x - 9\}$

$= 2.5x^3 - 1.5x^3 - 3.5x^2 - 2.5x^2 + 12x - 7 - 9$

$= x^3 - 6x^2 + 12x - 16$ (ଉତ୍ତର)

3.4.2 ଯୋଗ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ବିଷୟ :

(i) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି କ୍ରମବିନିମୟୀ ।**

ଯଦି $p(x)$ ଓ $q(x)$ ପ୍ରତ୍ୟେକ x ରେ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହୁଏ,

ତେବେ $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$

(ii) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ସହଯୋଗୀ ।**

ଯଦି $\{p(x) + q(x)\} + r(x) = p(x) + \{q(x) + r(x)\}$

(iii) $p(x) + 0 = 0 + p(x) = p(x)$

ଅର୍ଥାତ୍ 0 **(ଜିରୋ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହେଉଛି ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗାତ୍ମକ ଅଭେଦ)**

(iv) $p(x) + \{-p(x)\} = \{-p(x)\} + p(x) = 0$

ଅର୍ଥାତ୍ **$p(x)$ ଓ $-p(x)$ ପରସ୍ପରର ଯୋଗାତ୍ମକ ବିଲୋମୀ ।**

ବି.ଦ୍ର. : ଉଦାହରଣ ଜରିଆରେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଆମେ ଉପରୋକ୍ତ ନିୟମଗୁଡ଼ିକର ସଠିକତା ପ୍ରତିପାଦନ କରିପାରିବା ।

3.4.3 ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନ :

x ରେ ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପୂର୍ବରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ x ର ବଡ଼ରୁ ସାନ ବା ସାନରୁ ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଏ । **ବଣ୍ଟନ ନିୟମ (Distributive Law)** ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇ ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । ଗୁଣନ ପରେ ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ର କରି ପ୍ରାପ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ x ର ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଏ । ଅବଶ୍ୟ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ନ ହୋଇ y, z ଇତ୍ୟାଦି ହୋଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ - 6 :

$5x^2 + 3x - 4$ ଓ $2x + 3$ ର ଗୁଣଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ, ଏଠାରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ x ର ବଡ଼ରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଇଛି ।

ମନେକର $p(x) = 5x^2 + 3x - 4$ ଓ $q(x) = 2x + 3$

$\therefore p(x) \times q(x) = (5x^2 + 3x - 4)(2x + 3)$

$= (5x^2 + 3x - 4) \times 2x + (5x^2 + 3x - 4) \times 3$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= 5x^2 \times 2x + 3x \times 2x - 4 \times 2x + 5x^2 \times 3 + 3x \times 3 - 4 \times 3$

(ବଣ୍ଟନ ନିୟମର ପୁନଃ ପ୍ରୟୋଗ)

$= 10x^3 + 6x^2 - 8x + 15x^2 + 9x - 12$

$= 10x^3 + (6x^2 + 15x^2) + (-8x + 9x) - 12$ (ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ରୀକରଣ)

$= 10x^3 + 21x^2 + x - 12$ (ଉତ୍ତର)

ମନେକର ଗୁଣଫଳ $= 10x^3 + 21x^2 + x - 12 = r(x)$

ଉଦାହରଣ - 6 କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର । ଏଠାରେ $p(x)$ ଏବଂ $q(x)$ ର ଘାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 ଏବଂ 1 । ଉକ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳର ଘାତ 3, ଏଥିରୁ ଦେଖାଯାଉଛି ଯେ, ଯଦି $p(x)$ ଏବଂ $q(x)$ ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍, ତେବେ **$\{p(x) \times q(x)\}$ ର ଘାତ = $p(x)$ର ଘାତ + $q(x)$ର ଘାତ**

ଯେକୌଣସି ଉଦାହରଣ ନେଇ ଏହି ଉକ୍ତିର ସତ୍ୟତା ପରୀକ୍ଷା କରାଯାଇପାରେ ।

ମନେରଖ, (i) $p(x) \times q(x) = r(x)$ ହେଲେ, $r(x)$ କୁ ଉଭୟ $p(x)$ ଓ $q(x)$ ର ଗୁଣିତକ କୁହାଯାଏ ।

(ii) $p(x)$ ଓ $q(x)$ ପ୍ରତ୍ୟେକ $r(x)$ ର ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗୁଣନୀୟକ ।

ବି.ଦ୍ର. : ଏଠାରେ ଆଲୋଚିତ ଉଦାହରଣଟିରେ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀରେ କରାଯାଇଛି । ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀରେ ମଧ୍ୟ ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟା କରାଯାଇପାରେ । ନିଜେ ଚେଷ୍ଟା କର ।

3.4.4 ଗୁଣନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ କେତେକ ଜ୍ଞାତବ୍ୟ ବିଷୟ :

(i) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି କ୍ରମବିନିମୟୀ** । ଅର୍ଥାତ୍ $p(x)$ ଓ $q(x)$ ପ୍ରତ୍ୟେକ x ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହେଲେ, $p(x) \times q(x) = q(x) \times p(x)$ ।

(ii) ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ **ଗୁଣନ ପ୍ରକ୍ରିୟାଟି ସହଯୋଗୀ** । ଅର୍ଥାତ୍ ଯଦି $p(x), q(x)$ ଓ $r(x)$ ପ୍ରତ୍ୟେକ x ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ତେବେ, $\{p(x) \times q(x)\} \times r(x) = p(x) \times \{q(x) \times r(x)\}$ ।

(iii) **ବଣ୍ଟନ ନିୟମ :** $\{p(x) + q(x)\} \times r(x) = p(x) \times r(x) + q(x) \times r(x)$

(iv) $p(x) \times 0 = 0 \times p(x) = 0$

(v) $p(x) \times 1 = 1 \times p(x) = p(x)$ ଅର୍ଥାତ୍ ପଲିନୋମିଆଲ୍ କ୍ଷେତ୍ରରେ **1 ହେଉଛି ଗୁଣନାତ୍ମକ ଅଭେଦ ।**

3.4.5 ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଦ୍ୱାରା ଅନ୍ୟ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଭାଗକ୍ରିୟା :

ମନେକର $p(x)$ ଓ $q(x) \neq 0$ ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଏବଂ $q(x)$ ର ଘାତ, $p(x)$ ର ଘାତଠାରୁ ଛୋଟ କିମ୍ବା $p(x)$ ର ଘାତ ସହିତ ସମାନ ।

ତେବେ, $p(x) = q(x) \times k(x) + r(x)$

ଏଠାରେ, $r(x) = 0$ କିମ୍ବା $r(x)$ ର ଘାତ, $q(x)$ ର ଘାତଠାରୁ ଛୋଟ । ଯଦି $r(x) = 0$ ହୁଏ, ତେବେ $p(x)$, $q(x)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ବୋଲି କୁହାଯାଏ । ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଭାଗକ୍ରିୟା କିପରି ସମ୍ପାଦନ କରାଯାଏ, ତାହା ତୁମେମାନେ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିଛ । ମନେପକାଇବା ନିମନ୍ତେ ଏଠାରେ କେତେକ ଉଦାହରଣ ଦିଆଗଲା ।

ଉଦାହରଣ -7 : $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ କୁ $2x + 3$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର ।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ ଉଭୟ ଭାଜ୍ୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଓ ଭାଜକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକ ବଡ଼ରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ରଖାଯାଇଛି ।

ଭାଗକ୍ରିୟା ଆରମ୍ଭରେ ଦେଖିବାକୁ ହେବ ଯେ ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦ $2x^3$ କୁ ଭାଜକ ପ୍ରଥମ ପଦ $2x$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଯାହା ଭାଗଫଳ ହେବ ତାହାହିଁ ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ଅଟେ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $2x^3 \div 2x = x^2$ ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ।

$2x + 3$) $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ ($x^2 + x - 2$

$2x^3 + 3x^2$ ($2x + 3$ କୁ x^2 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଇଛି)

$- \quad -$

$2x^2 - x - 6$

$2x^2 + 3x$ ($2x+3$ କୁ xଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଗୁଣଫଳକୁ $2x^2 - x - 6$ରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଇଛି)

$- \quad -$

$-4x - 6$

$-4x - 6$ ($2x+3$ କୁ -2 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଗୁଣଫଳକୁ $-4x-6$ରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଇଛି)

$+ \quad +$

0

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ $2x^3 + 5x^2 - x - 6$ କୁ $2x + 3$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ ଭାଗଫଳ $x^2 + x - 2$ ଏବଂ ଭାଗଶେଷ 0 ଅଟେ । ଅର୍ଥାତ୍ ଦତ୍ତ ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି $2x + 3$ ଦ୍ୱାରା ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ବିଭାଜ୍ୟ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $2x^3 + 5x^2 - x - 6 = (2x+3)(x^2 + x - 2)$

ଉଦାହରଣ -8 : $6x^3 + 11x^2 - 29x + 17$ କୁ $3x^2 - 5x + 2$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର ।

ସମାଧାନ : ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ମଧ୍ୟ ଭାଜ୍ୟ ଓ ଭାଜକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଦ୍ୱୟର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ x ର ବଡ଼ରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ରଖାଯାଇଛି । ନିମ୍ନରେ ଭାଗକ୍ରିୟାକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଏଠାରେ ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦ $6x^3$ କୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦ $3x^2$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଫଳ $2x$ । ଏହା ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ।

$3x^2 - 5x + 2 \;)\; 6x^3 + 11x^2 - 29x + 17 \;(\; 2x + 7$

$\quad 6x^3 - 10x^2 + 4x$ ($3x^2 - 5x + 2$ କୁ $2x$ ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଗୁଣଫଳକୁ ଭାଜ୍ୟରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଇଛି)

$\quad - \quad + \quad -$

$\quad 21x^2 - 33x + 17$

$\quad 21x^2 - 35x + 14$ ($3x^2 - 5x + 2$ କୁ 7 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି ଗୁଣଫଳକୁ $21x^2 - 33x + 17$ରୁ ବିୟୋଗ କରାଯାଇଛି)

$\quad - \quad + \quad -$

$\quad 2x + 3$

$\therefore$ ଏହି ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଗଫଳ $= 2x + 7$ ଓ ଭାଗଶେଷ $= 2x + 3$

ତେଣୁ $6x^3 + 11x^2 - 29x + 17 = (3x^2 - 5x + 2)(2x + 7) + (2x + 3)$

ଅର୍ଥାତ୍ **ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ × ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ**

ବି.ଦ୍ର. : ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କର ଭାଗକ୍ରିୟାରୁ ଆମେ ଜାଣିଛେ ଯେ, ଏକ ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା 'n' କୁ ଅନ୍ୟ ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା m($m \le n$ ଏବଂ $m \ne 0$) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ଯଦି ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ଯଥାକ୍ରମେ k ଓ r ହୁଏ,

ତେବେ $n = mk + r$

ଅର୍ଥାତ୍ ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ x ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ ଏଠାରେ $r = 0$ କିମ୍ବା $r < m$

ଏହାକୁ **ଇଉକ୍ଲିଡ଼ୀୟ ପଦ୍ଧତି (Euclidean Algorithm)** କୁହାଯାଏ ।

3.4.6 ଦୁଇ ବା ଅଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକର ଯୋଗ, ବିୟୋଗ, ଗୁଣନ ଓ ଭାଗକ୍ରିୟା :

ଯଦି x ଓ y ଦୁଇଟି ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ହୁଏ, ତେବେ $2xy$, x^2y, $-5xy^2$ ପ୍ରତ୍ୟେକ x ଓ y ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ । ସେହିପରି xyz, $3x^2yz$, $-5x^3yz^2$, $\frac{1}{3}x^3yz^3$ ପ୍ରତ୍ୟେକ x, y ଓ z ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ମନୋମିଆଲ୍ ହେବ । ଏହିପରି କେତେକ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗ ବା ବିୟୋଗ ଦ୍ୱାରା ଦୁଇ ବା ଅଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିମୋନିଆଲ୍ ସୃଷ୍ଟି ହୁଏ ।

ମନେକର x ଓ y ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ କେତେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ଦିଆଯାଇଛି । ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ସଦୃଶ ପଦଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ର କରି ଯୋଗଫଳ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ । ଲବ୍ଧ ଯୋଗଫଳକୁ x ବା y ର ବଡ଼ରୁ ସାନ ଅଥବା ସାନରୁ ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ଲେଖାଯାଏ । ସେହିପରି ଦୁଇଟି ପଲିନୋମିଆଲ୍ ବିୟୋଗ କଲାବେଳେ ମଧ୍ୟ ଉପରୋକ୍ତ ପଦ୍ଧତି ଅନୁସରଣ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 9 :

$2x^2 + 3xy - 4y^2$ ଓ $5x^2 - 4xy + 6y^2$ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଯୋଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ଉଭୟ ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ ଓ ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ ।

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{r} 2x^2 + 3xy - 4y^2 \\ 5x^2 - 4xy + 6y^2 \\ \hline 7x^2 - xy + 2y^2 \end{array}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= 7x^2 - xy + 2y^2$ (ଉତ୍ତର)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଯୋଗଫଳ $= (2x^2 + 3xy - 4y^2) + (5x^2 - 4xy + 6y^2)$

$= (2x^2 + 5x^2) + \{3xy + (-4xy)\} + \{(-4y^2) + 6y^2\}$

$= 7x^2 - xy + 2y^2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 :

$2x^3 - 3x^2y + 4xy^2$ ରୁ $x^3 - x^2y + 4xy^2 + 2y^3$ କୁ ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ : ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{rrrr} 2x^3 & - 3x^2y & + 4xy^2 & \\ x^3 & - x^2y & + 4xy^2 & + 2y^3 \\ - & + & - & - \\ \hline x^3 & - 2x^2y & + 0 & - 2y^3 \end{array}$$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ $= x^3 - 2x^2y - 2y^3$ (ଉତ୍ତର)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ : $2x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - (x^3 - x^2y + 4xy^2 + 2y^3)$

$= 2x^3 - 3x^2y + 4xy^2 - x^3 + x^2y - 4xy^2 - 2y^3$

$= 2x^3 - x^3 - 3x^2y + x^2y + 4xy^2 - 4xy^2 - 2y^3$

ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ବିୟୋଗଫଳ $= x^3 - 2x^2y - 2y^3$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 11 :

$2x + 3y$ ଓ $4x^2 - 5xy + y^2$ ର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ :

ଏଠାରେ ଉଭୟ ପଲିନୋମିଆଲ୍ x ର ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କରୁ ସାନ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ଲେଖାଯାଇଛି ।

ସ୍ତମ୍ଭ ପ୍ରଣାଳୀ :

$$\begin{array}{l} \quad 4x^2 - 5xy + y^2 \\ \times \; 2x + 3y \\ \hline 8x^3 - 10x^2y + 2xy^2 \quad \text{(ପ୍ରଥମେ 2x ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି)} \\ \qquad 12x^2y - 15xy^2 + 3y^3 \quad \text{(3y ଦ୍ୱାରା ଗୁଣି)} \\ \hline 8x^3 + 2x^2y - 13xy^2 + 3y^3 \end{array}$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= 8x^3 + 2x^2y - 13xy^2 + 3y^3$ (ଉତ୍ତର)

ଧାଡ଼ି ପ୍ରଣାଳୀ :

$(2x + 3y)\ (4x^2 - 5xy + y^2)$

$= 2x\ (4x^2 - 5xy + y^2) + 3y(4x^2 - 5xy + y^2)$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମ)

$= 8x^3 - 10x^2y + 2xy^2 + 12x^2y - 15xy^2 + 3y^3$ (ବଣ୍ଟନ ନିୟମର ପୁନଃ ପ୍ରୟୋଗ)

$= 8x^3 + (-10x^2y + 12x^2y) + (2xy^2 - 15xy^2) + 3y^3$ (ସଦୃଶ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ଏକତ୍ରୀକରଣ)

$= 8x^3 + 2x^2y - 13xy^2 + 3y^3$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଗୁଣଫଳ $= 8x^3 + 2x^2y - 13xy^2 + 3y^3$ (ଉତ୍ତର)

ଭାଗକ୍ରିୟା ସମୟରେ ଭାଜ୍ୟ ତଥା ଭାଜକ ଉଭୟର ପଦଗୁଡ଼ିକୁ x ବା y କୌଣସି ଗୋଟିକର ଘାତାଙ୍କର ଅଧଃକ୍ରମ ବା ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖାଯାଏ । ପୂର୍ବ ଭାଗକ୍ରିୟା ଭଳି ଭାଜ୍ୟର ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ଭାଜକର ପ୍ରଥମ ପଦ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳର ପ୍ରଥମ ପଦ ସ୍ଥିର କରାଯାଏ । ଭାଗକ୍ରିୟାର ପରବର୍ତ୍ତୀ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପର୍ଯ୍ୟାୟରେ ଏହି ପ୍ରଣାଳୀ ଅନୁସରଣ କରାଯାଇ ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 12 :

$x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$ କୁ $x - y$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ ଭାଜ୍ୟ ଏବଂ ଭାଜକ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ପଦଗୁଡ଼ିକ x ର ଘାତାଙ୍କର ଅଧଃକ୍ରମରେ ଥିବା ବେଳେ y ର ଘାତାଙ୍କର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ହୋଇ ରହିଛି ।

$$
\begin{array}{l|l|l}
x-y & x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4 & x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \\
 & x^4 - x^3y & \\
 & \underline{- \quad +} & \\
 & - 3x^3y + 6x^2y^2 & \\
 & - 3x^3y + 3x^2y^2 & \\
 & \underline{+ \qquad -} & \\
 & 3x^2y^2 - 4xy^3 & \\
 & 3x^2y^2 - 3xy^3 & \\
 & \underline{- \qquad +} & \\
 & -xy^3 + y^4 & \\
 & -xy^3 + y^4 & \\
 & \underline{+ \qquad -} & \\
 & 0 &
\end{array}
$$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଭାଗଫଳ $= x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (a)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ସାନରୁ ବଡ଼ ଘାତାଙ୍କ କ୍ରମରେ ସଜାଇ ଲେଖ ।

   $1.4y^3$, $\sqrt{2}\,y^2$, -51, $7y^8$, $-8y^4$, $\frac{11}{13}y^9$, $\sqrt{3}\,y$

2. ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ସଦୃଶ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକୁ ବାଛି ପୃଥକ ଭାବେ ଲେଖ ।

   $12x^2$, $-3x$, $\frac{1}{\sqrt{2}}x^3$, $-5x^2$, $\frac{x}{7}$, 15, $\sqrt{3}\,x^3$, $10x^4$, $\frac{8}{11}$

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକାର ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରୁ ଦୁଇଟି ଲେଖାଏଁ ଉଦାହରଣ ଦିଅ ।

   (i) ଶୂନଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍

   (ii) ଏକ ପଦବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍

   (iii) ଦୁଇ ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍

   (iv) ତିନି ପଦ ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍

4. ଯୋଗ କର -

(i) $2y^3 - 3y - 4, \quad 2 - y^3 + 5y$

(ii) $3x^4 - 2x^3 - 5 + x - 5x^2, \quad 3x^3 + 2x^2 - x^4 - x + 1$

(iii) $\frac{3}{4}x^2 - \frac{4}{5}x - 3, \quad \frac{1}{4}x^2 + \frac{4}{5}x + 2$

(iv) $2.1x^3 + 3.2x^2 + 5 - 3x, \quad 1.9x^3 - 1.2x^2 + 2x - 1$

(v) $\frac{1}{2}z^3 - \frac{3}{2}z^2 + 6z, \quad \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}z^3 - 3z - 1, \quad z^3 + 2z^2 + 3z - 4$

(vi) $8x - 3xy + 2xyz, \quad 2xy - 5x + 3xyz, \quad xy - 3x + 4xyz$

(vii) $5x^2 - 2xy + y^2, \quad 4xy - 2y^2 - 3x^2, \quad 4y^2 - xy - x^2$

5. ବିୟୋଗ କର -

(i) $6x^3 - 13x^2 + 14$ ରୁ $-x^3 + 2x - 7x^2 + 11$

(ii) $t^4 - 11 + 2t^2 - t^3$ ରୁ $2t^3 - 8t^2 - 10$

(iii) $\frac{12}{13}y^2 - \frac{5}{13}y^3 - 15$ ରୁ $-\frac{1}{13}y^2 + \frac{8}{13}y^3 + 20$

(iv) $2.5x^3 - 7 - 3.5x^2$ ରୁ $2.5x^2 + 1.5x^3 + 8 - 2x$

(v) $x^2 - 2xy + 3y^2$ ରୁ $2x^2 - xy - 2y^2$

(vi) $2x^2 - 3xy - 4xy^2$ ରୁ $x^2 - xy - 2xy^2$

(vii) $a - 3b + 2c$ ରୁ $3b - 7c + 2a$

(viii) $\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b - \frac{3}{2}c$ ରୁ $a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c$

6. ନିମ୍ନରେ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କରି ଗୁଣଫଳର ଘାତ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $2x^2 - 3x + 5$ ଓ $x^2 + 5x + 2$

(ii) $y^3 - 5y^2 + 11y$ ଓ $y^5 - 20y^4 + 17$

(iii) $(2x+3)$ ଓ $5x^2 - 7x + 8$

(iv) $(x-1), (7x-9)$ ଓ $3x^3 - 14x^2 + 8$

(v) $(x^2 + y^2)$ ଓ $(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

(vi) $(2x+3y), (2x-3y)$ ଓ $(4x^2 + 9y^2)$

7. ଭାଗଫଳ ଓ ଭାଗଶେଷ ନିରୂପଣ କର ।

(i) $(x^3 - 1) \div (x - 1)$

(ii) $(-81y^2 + 64) \div (8 - 9y)$

(iii) $(2x^3 - 7x^2 - x + 2) \div (x^2 - 3x - 2)$

(iv) $(x^3 - 14x^2 + 37x - 26) \div (x - 2)$

(v) $(t^3 - 6t^2 + 11t - 6) \div (t^2 - 5t + 6)$

(vi) $(8a^2 - 34ab + 21b^2) \div (4a + 3b)$

(vii) $(16xy^2 - 21x^2y + 9x^3 - 4y^3) \div (x - y)$

(viii) $(x^4 + x^2y^2 + y^4) \div (x^2 - xy + y^2)$

8. ଯଦି $p(x) = 3x^3 - 6x^2 + 2$ ଏବଂ $q(x) = 2x^2 - 5x + 1$

ତେବେ (i) $2p(x) - 5q(x)$ ଓ (ii) $4p(x) + 3q(x)$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

9. ଯଦି $p(x) = 2x^3 + 3x + 5$, $q(x) = x^2 + 4x + 1$ ଓ $r(x) = x - 1$ ହୁଏ ତେବେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ,

(i) $p(x) \times q(x) = q(x) \times p(x)$

(ii) $p(x) \times \{q(x) + r(x)\} = p(x) . q(x) + p(x) . r(x)$

10. ସରଳ କର :

(i) $(x^2 - 3x + 5) + (2x^2 - x - 2) - (3x^2 + 7x - 3)$

(ii) $(x^2 - xy + 2y^2) - (2x^2 + 4xy + 3y^2) + (4x^2 - 2xy - y^2)$

(iii) $(a + b + c)\ (a - b + c) - (a + b - c)(a - b - c)$

3.5 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ (Zeroes of a Polynomial) :

ମନେକର ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x) = 3x^3-6x^2-5x+10$

$p(x) = 3x^3-6x^2-5x+10$ ରେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି $x = 1$ ହେଲେ

$p(1) = 3 \times (1)^3-6 \times (1)^2-5 \times (1)+10 = 3 - 6 - 5 + 10 = 2$ ହେବ ।

$\therefore p(x)$ରେ x ର ମାନ 1 ପାଇଁ $p(x)$ ର ମାନ 2 ହେବ ।

ସେହିପରି $x = -1$ ହେଲେ, $p(-1) = 3 \times (-1)^3-6(-1)^2-5x(-1)+10= -3-6+5+10 = 6$ ହେବ।

ଅର୍ଥାତ୍ $p(x)$ରେ x ର ମାନ -1 ପାଇଁ $p(x)$ ର ମାନ 6 ହେବ ।

ତେବେ x ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ହେଲେ $p(x)$ ର ମୂଲ୍ୟ ଶୂନ ହେବ ?

ପରୀକ୍ଷା କଲେ ଜଣାଯିବ ଯେ, ଯଦି $x = 2$ ହୁଏ, ତେବେ $p(2) = 3 \times 2^3-6 \times 2^2-5 \times 2+10$

$= 24-24-10 + 10 = 0$ ହେବ।

ଏହି ପରିସ୍ଥିତିରେ ଆମେ 2 କୁ $p(x)$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଜିରୋ ବୋଲି କହିବା ।

ସଂଜ୍ଞା : ଯଦି $p(x)$ ଏକ ଅଣଶୂନଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍, 'x' ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ 'x' ର ମାନ c ପାଇଁ $p(x) = 0$ ହୁଏ, ତେବେ c କୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$ ର ଏକ ଜିରୋ (zero) କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ $p(x)$ର ଜିରୋ ଏକ ସଂଖ୍ୟା 'c' । ଯେଉଁଠାରେ $p(c) = 0$ ହେବ ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ନିରୂପଣ :

ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟିକୁ ଶୂନ ସଙ୍ଗେ ସମାନ କରି ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସମୀକରଣ ଗଠନ କର । ଏହି ସମୀକରଣ ସମାଧାନ କଲେ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଯେଉଁ ବାସ୍ତବମାନଗୁଡ଼ିକ ମିଳିବ ତାହାହିଁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ଅଟେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $2x + 1$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ହେଉଛି $-\frac{1}{2}$ ।

କାରଣ $2x + 1= 0$ ହେଲେ, $x = -\frac{1}{2}$ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଗୋଟିଏ n ଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସର୍ବାଧିକ n ସଂଖ୍ୟକ ବାସ୍ତବ ଜିରୋ ରହିପାରେ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $2x- 6$ ପଲିନୋମିଆଲଟି ଏକ ଘାତୀ ଓ ଏହାର କେବଳ ଗୋଟିଏ ଜିରୋ ଅଛି; ଯାହା 3, $x^2 - 5x + 6$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି ଦ୍ୱିଘାତୀ ହେତୁ ଏହାର ଦୁଇଟି ଜିରୋ 2 ଓ 3 ଅଛି ।ସେହିପରି ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର

ତିନୋଟି 'ଜିରୋ' ମଧ୍ୟରୁ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ଜିରୋ ଥାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, x^3-8 ତ୍ରିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ଜିରୋ 2 ଅଛି ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (i) ଅଣଶୂନ ଶୂନଘାତୀ ମନୋମିଆଲ୍ (ଧ୍ରୁବକ)ର କୌଣସି 'ଜିରୋ' ନ ଥାଏ ।

(ii) ଜିରୋ ମନୋମିଆଲ୍‌ର ବା ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର 'ଜିରୋ' ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇ ଥାଏ ।

(iii) ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକାଧିକ ଜିରୋ ଥାଇପାରେ ।

ଉଦାହରଣ - 13 : $p(x) = x^5-7x^2-10$ ହେଲେ (i) $p(0)$ (ii) $p(-2)$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

i) $p(x) = x^5-7x^2-10 \Rightarrow p(0) = 0^5-7 \times 0^2-10 = -10$ (ଉତ୍ତର)

ii) $p(x) = x^5-7x^2-10 \Rightarrow p(-2) = (-2)^5-7 \times (-2)^2-10 = -32-28-10 = -70$(ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : $p(x) = 3x + 2$ ର ଜିରୋ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ଆବଶ୍ୟକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି : $3x + 2 = 0$

$\Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$

$\therefore -\frac{2}{3}$ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ଅଟେ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $x^2 -3x$ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର 'ଜିରୋ'ଦ୍ୱୟ 0 ଏବଂ 3 ।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $x^2 - 3x$ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି : $x^2 - 3x = 0$

$\Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$ ବା $x = 3$

$\therefore$ 0 ଏବଂ 3, $x^2 -3x$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଦୁଇଟି 'ଜିରୋ' । (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ :

ଦତ୍ତ : $p(x) = x^2 -3x$

$p(x)$ ର 0 ଏବଂ 3 ଦୁଇଟି ଜିରୋ ହେଲେ ଦର୍ଶାଇବାକୁ ହେବ ଯେ $p(0) = 0$, ଏବଂ $p(3) = 0$

ବର୍ତ୍ତମାନ ଦେଖିବା $p(0) = (0)^2 - 3 \times 0 = 0$ ଏବଂ $p(3) = (3)^2 - 3 \times 3 = 9 - 9 = 0$

$\therefore$ 0 ଏବଂ 3 ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଜିରୋ ଅଟନ୍ତି । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 16 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $x^2 +6x + 15$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର 'ଜିରୋ' ନାହିଁ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $p(x) = x^2 +6x + 15$

$$= x^2 +6x + 9+6 = [x^2+ 2 . x . 3 + (3)^2] + 6$$

$$= (x + 3)^2 + 6$$

ଏଠାରେ x ର କୌଣସି ବାସ୍ତବ ମାନ ପାଇଁ $(x+3)^2$ ଋଣାତ୍ମକ ନୁହେଁ । ତେଣୁ p(x) ର ମାନ ସର୍ବଦା ≥ 6 ହେବ ।

$\therefore$ p(x) ର କୌଣସି ଜିରୋ ନାହିଁ ।

3.6 ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ଓ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ (Remainder Theorem and its Application)

ପୂର୍ବରୁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଭାଗକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ କରିବା ବିଷୟରେ ତୁମେ ଅବଗତ ଅଛ । ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଦୁଇଟି ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ଉଦାହରଣ - 17 :

$$
\begin{array}{l}
x-2\ )\ x^3-3x^2+4x-5\ (\ x^2-x+2 \\
\qquad\quad x^3-2x^2 \\
\qquad\quad -\quad + \\
\hline
\qquad\qquad -x^2+4x-5 \\
\qquad\qquad -x^2+2x \\
\qquad\qquad +\qquad - \\
\hline
\qquad\qquad\quad 2x-5 \\
\qquad\qquad\quad 2x-4 \\
\hline
\qquad\qquad\qquad -1
\end{array}
$$

$\therefore$ x^3-3x^2+4x-5 କୁ $(x-2)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବାରୁ ଭାଗଶେଷ -1 ହେଲା ।

ପୁନଶ୍ଚ $p(x)=x^3-3x^2+4x-5$ ହେଲେ,

$p(2)=(2)^3-3(2)^2+4(2)-5$

$=8-12+8-5=-1$

ଏଠାରେ କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଛ ? ଯେତେବେଳେ p(x)କୁ $(x-2)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରୁଛ, ସେତେବେଳେ ଭାଗଶେଷ = p(2) ହେଉଛି ।

ଉପରୋକ୍ତ ସତ୍ୟକୁ ଏକ ଉପପାଦ୍ୟ ମାଧ୍ୟମରେ ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି, ଯାହାକୁ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ (Reminder Theory) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 18 : ଯଦି $p(x)=x^4+x^3+x^2-5x+1$ ଏବଂ $q(x)=x+1$ ହୁଏ ତେବେ p(x)କୁ q(x) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଶେଷ r(x) ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ :

$$
\begin{array}{l}
x+1\ )\ x^4+x^3+x^2-5x+1\ (\ x^3+x-6 \\
\qquad\quad x^4+x^3 \\
\qquad\quad -\quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad x^2-5x+1 \\
\qquad\qquad\qquad x^2+x \\
\qquad\qquad\qquad -\quad - \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad -6x+1 \\
\qquad\qquad\qquad\quad -6x-6 \\
\qquad\qquad\qquad\quad +\quad + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\qquad 7
\end{array}
$$

ପୁନଶ୍ଚ $p(-1)=(-1)^4+(-1)^3+(-1)^2-5(-1)+1$

$=1-1+1+5+1=7$

ଏଠାରେ କ'ଣ ଲକ୍ଷ୍ୟ କରୁଛ ?

ଯେତେବେଳେ p(x) କୁ (x+1) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଉଛି ସେତେବେଳେ ଭାଗଶେଷ = p(−1) ହେଉଛି ।

ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣ ଦ୍ୱୟକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜାଣି ପରିବ ଯେ, ଯେତେବେଳେ $p(x)$ କୁ $(x–a)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ସେତେବେଳେ ଭାଗଶେଷ $p(a)$ ପାଇବା ।

ଏପରି କେତେକ ଭିନ୍ନ ଉଦାହରଣ ନେଇ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ ।

3.6.1 ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ (Remainder Theorem):

$p(x)$ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍, ଯାହାର ଘାତ ≥ 1 ତେବେ, $P(x)$ କୁ $(x - a)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, ଭାଗଶେଷ $P(a)$ ହେବ ।

ଦତ୍ତ : ଭାଜ୍ୟ = $p(x)$ ଓ ଭାଜକ = $x - a$

ପ୍ରାମାଣ୍ୟ : ପ୍ରମାଣ କରିବାକୁ ହେବ ଯେ, ଭାଗଶେଷ = $p(a)$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକରାଯାଉ ଭାଗଫଳ = $q(x)$ ଓ ଭାଗଶେଷ = $r(x)$

ଆମେ ଜାଣୁ ଯେ, ଭାଜ୍ୟ = ଭାଜକ x ଭାଗଫଳ + ଭାଗଶେଷ (Euclidean Algorithm)

$\Rightarrow p(x) = (x - a) \,.\, q(x) + r(x)$ ଏଠାରେ $r(x)$ ର ଘାତ, ଭାଜକର ଘାତରୁ କମ୍ ଅର୍ଥାତ୍ 0 ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ତେଣୁ $r(x)$ ଗୋଟିଏ ଧ୍ରୁବକ ସଂଖ୍ୟା ହେବ, ମନେକର r ହେଉ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଉଭୟ ପଟରେ $x = a$ ନେଲେ ପାଇବା

$p(a) = (a - a)\, q(a) + r \Rightarrow p(a) = 0.\, q(a) + r \Rightarrow r = p(a)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ: (i) ଏହି ଉପପାଦ୍ୟର ଫଳସ୍ୱରୂପ ଆମେ ଲେଖିପାରିବା –

$$p(x) = (x - a) \,.\, q(x) + p(a) \;\ldots.\; (1)$$

(ii) ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟର କଥନରେ $p(x)$ କୁ $x - a$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ ନ କରି, ଯଦି $2x - a$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଇଥାନ୍ତା, ତେବେ ଭାଗଶେଷ $p\left(\frac{a}{2}\right)$ ହୋଇଥାନ୍ତା ।

ପ୍ରମାଣ : $p(x) = (2x - a) \,.\, q(x) + r$

$x = \frac{a}{2}$ ନେଲେ ପାଇବା, $p\left(\frac{a}{2}\right) = \left(2.\frac{a}{2} - a\right) q\left(\frac{a}{2}\right) + r \Rightarrow p\left(\frac{a}{2}\right) = 0.q\left(\frac{a}{2}\right) + r \Rightarrow p\left(\frac{a}{2}\right) = r$

$\therefore\; r = p\left(\frac{a}{2}\right)$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ମନେରଖ : ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$ କୁ $(kx - a)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ ଭାଗଶେଷ $p\left(\frac{a}{k}\right)$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ -19 : ଭାଜ୍ୟ= $y^4 - 3y^2 + 2y + 6$ ଭାଜକ= $(y+1)$ ବିନା ଭାଗକ୍ରିୟାରେ ଭାଗଶେଷ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $p(y) = y^4 - 3y^2 + 2y + 6$ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ ଭାଗଶେଷ $p(-1)$ ହେବ ।

$p(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^2 + 2(-1) + 6 = 1 - 3 - 2 + 6 = 2$

$\therefore$ $p(y)$ କୁ $(y+1)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ $p(-1)$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ -20 : ବିନା ଭାଗ କ୍ରିୟାରେ $x^3 - ax^2 + 6x - a$ କୁ $x-a$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି ଭାଗଶେଷ ସ୍ଥିର କର । ଯଦି ଭାଗଶେଷ 10 ହୋଇଥାଏ ତେବେ 'a' ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $p(x) = x^3 - ax^2 + 6x - a$ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁସାରେ, ଭାଗଶେଷ p(a) ହେବ ।

$p(a) = (a)^3 - a \times (a)^2 + 6(a) - a = a^3 - a^3 + 6a - a = 5a$

କିନ୍ତୁ ଭାଗଶେଷ 10 ହେତୁ $5a = 10 \Rightarrow a = 2$

$\therefore$ 'a' ର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ମାନ 2 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ -21 : ଭାଗକ୍ରିୟା ବିନା $x^3 - 2mx^2 + mx - 1$ କୁ $(x-2)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ପରେ ଯଦି ଭାଗଶେଷ 1 ରହେ, ତେବେ m ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $p(x) = x^3 - 2mx^2 + mx - 1 \Rightarrow p(2) = (2)^3 - 2m(2)^2 + m(2) - 1$

$\Rightarrow 1 = 8 - 8m + 2m - 1 \Rightarrow 6m = 6 \Rightarrow m = 1$ (ଉତ୍ତର)

3.6.2 ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗ (Application of Remainder Theorem) :

ଭାଗକ୍ରିୟା ବିନା ସହଜ ଉପାୟ ଅବଲମ୍ବନରେ ଭାଗଶେଷ ନିରୂପଣ ସହ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ । ନିମ୍ନରେ ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟକୁ ଜାଣିବା ଏବଂ ଏହାର ପ୍ରୟୋଗ କରିବା ।

ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ (Factor Theorem) :

p (x) ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଯାହାର ଘାତ ≥ 1 ଏବଂ a ଏକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ହେଲେ,

(i) ଯଦି p (a) = 0 ହୁଏ, ତେବେ (x – a), p(x) ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

(ii) ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଯଦି (x – a), p (x) ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ, ତେବେ p (a) = 0 ହେବ ।

ପ୍ରମାଣ (i) **:** $p(x) = (x - a)\, q(x) + p(a)$ (ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ)

$= (x - a)\, q(x)$ [$\because p(a) = 0$] (ଦତ୍ତ)

$\therefore (x - a), p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ପ୍ରମାଣ (ii) **:** ଯେହେତୁ $(x - a), p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ

ଅତଏବ $p(x) = (x - a)\, q(x)$ (ମନେକର)

$\Rightarrow p(a) = (a - a) \times q(a) = 0$

$\therefore (x - a), p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେଲେ, $p(a) = 0$ ହେବ । (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ -22 : ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $(x - 3)$, $x^3 - 3x^2 + 4x - 12$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

ସମାଧାନ : ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ଅନୁଯାୟୀ $(x - 3)$ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ଯଦି $p(3)=0$ ହେବ ।

$p(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 12$

$\therefore p(3) = (3)^3 - 3 \times (3)^2 + 4(3) - 12 = 27 - 27 + 12 - 12 = 0$

$\therefore (x-3), p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 23 : ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗରେ $x^2 - 5x + 6$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $p(x) = x^2 - 5x + 6$

$x = 1$ ପାଇଁ $p(1) = (1)^2 - 5(1) + 6 = 1 - 5 + 6 = 2$

$x = -1$ ପାଇଁ $p(-1) = (-1)^2 - 5(-1) + 6 = 1 + 5 + 6 = 12$

$x = 2$ ପାଇଁ $p(2) = (2)^2 - 5(2) + 6 = 4 - 10 + 6 = 10 - 10 = 0$

$\therefore (x - 2)$, $p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ଉତ୍ପାଦକ $(x - 2)$ ଦ୍ୱାରା $p(x)$ କୁ ଭାଗକରିବା ।

$$
\begin{array}{r|l}
x-2 & x^2 - 5x + 6 \;(\; x - 3 \\
 & x^2 - 2x \\
 & \underline{-\quad +\quad} \\
 & -3x + 6 \\
 & -3x + 6 \\
 & \underline{+\quad -\quad} \\
 & 0
\end{array}
$$

ଭାଗଫଳ $(x - 3)$, $p(x)$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ।

$\therefore x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

ଉଦାହରଣ - 24 : ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରୟୋଗରେ $x^3+2x^2 - x - 2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର $p(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$

$x = 1$ ହେଲେ $p(1) = (1)^3 + 2(1)^2 - (1) - 2 = 3 - 3 = 0$

$\therefore (x - 1), p(x)$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ....(i)

ପୁନଶ୍ଚ $x = -1$ ହେଲେ, $p(-1) = (-1)^3 + 2(-1)^2 - (-1) - 2 = -1+2+1-2 = 0$

$\therefore (x + 1), p(x)$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ .... (ii)

ପୁନଶ୍ଚ $x = -2$ ହେଲେ, $p(-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 - (-2) - 2 = -8+8+2-2 = 0$

$\therefore (x + 2)$ ମଧ୍ୟ $p(x)$ ର ଅନ୍ୟ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ । .... (iii)

(i), (ii) ଓ (iii) ରୁ $x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$

ସୂଚନା : $p(x)$ ର ଉତ୍ପାଦକଟି ଜାଣିବା ପରେ ତା' ଦ୍ୱାରା $p(x)$ କୁ ଭାଗ କରି ଭାଗଫଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । ଯଦି ଭାଗଫଳଟି ଏକଘାତୀ ହୋଇଥାଏ ତାହା ଆବଶ୍ୟକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ । ଭାଗଫଳଟିର ଘାତ 1 ରୁ ଅଧିକ ହୋଇଥିଲେ ଭାଗଫଳକୁ $q(x)$ ମନେକରି ପୁଣି ପୂର୍ବ ପଦ୍ଧତି ଅନୁସାରେ ଯଦି ସମ୍ଭବ, ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରାଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଉପରୋକ୍ତ ଉଦାହରଣରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର $p(x)$ ର ତିନିଗୋଟି ଜିରୋ ସମ୍ଭବ ହେଲା ।

ଏଠାରେ $p(x)$ ର ଜିରୋ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ $1, -1$ ଓ -2 ।

ଅର୍ଥାତ୍ x ର ମାନ 1, –1 ଓ –2 ପାଇଁ $p(x) = 0$ ହେଲା ।

(i) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି ତ୍ରିଘାତୀ ହେତୁ ଏହାର ତିନୋଟି ଜିରୋ ସମ୍ଭବ ହେଲା (ଅନୁଚ୍ଛେଦ 3,5)

(ii) ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଯେତେଗୋଟି ଜିରୋ ସମ୍ଭବ; ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ସେତେଗୋଟି ଏକଘାତୀ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସମ୍ଭବ ।

ଉଦାହରଣ - 25 : k ର ମୂଲ୍ୟ କେତେ ହେଲେ ପଲିନୋମିଆଲ୍

$4x^3 + 3x^2 – 4x + k$ ର $x – 1$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

ସମାଧାନ : ଯେହେତୁ $x – 1$, ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x) = 4x^3 + 3x^2 – 4x + k$ ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ,

ଅତଏବ $P(1) = 0$ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ $P(1) = 4 \times 1^3 + 3 \times 1^2 – 4 \times 1 + k = 0$

$\Rightarrow 4 + 3 – 4 + k = 0 \Rightarrow 3 + k = 0 \Rightarrow k = – 3$ (ଉତ୍ତର)

$\therefore$ k ର ମାନ – 3 ପାଇଁ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର $(x – 1)$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ 3 (b)

1. ଭାଗକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ ନକରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ସ୍ଥଳରେ ଭାଗଶେଷ କେତେ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

i) ଭାଜ୍ୟ $x^3 + x^2 + x + 1$ ଏବଂ ଭାଜକ $x – 1$,

ii) ଭାଜ୍ୟ $x^3 – x^2 + x – 1$ ଏବଂ ଭାଜକ $x + 1$,

iii) ଭାଜ୍ୟ $2x^3 – 3x + 4$ ଏବଂ ଭାଜକ $2x – 1$ ଓ

iv) ଭାଜ୍ୟ $t^4 – t^3 + t^2 – t + 1$ ଏବଂ ଭାଜକ $t + 2$

2. (a) $p(x) = 8x^3 – 2x^2 + 5x – 6$ ହେଲେ,

(i) p(0) (ii) p(1) (iii) p(–1) (iv) p (2) (v) $p\left(\frac{1}{2}\right)$ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ମାନଙ୍କର 'ଜିରୋ' ନିରୂପଣ କର ।

(i) $p(x) = 3x^2 + 4x + 1$ (ii) $p(x) = cx – d\ (c \neq 0)$

(iii) $p(z) = 4z^2 – 1$ (iv) $p(y) = (y–1)(y+2)$

3. ପଲିନୋମିଆଲ୍ p(x)ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଯଦି,

(i) $p(–3) = 0$ ହୁଏ । (ii) $p(2) = 0$ ହୁଏ ।

(iii) $p\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ ହୁଏ । (iv) $p\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ ହୁଏ ।

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ କେଉଁ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର $x+1$ ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ଅଟେ ?

(i) x^3+x^2+x+1 (ii) $x^4+x^3+x^2+x+1$

(iii) $x^4+3x^3+3x^2+x+1$ (iv) $x^3– x^2– (2 + \sqrt{2})\,x – \sqrt{2}$

5. କେଉଁ କେଉଁ ପଲିନୋମିଆଲ୍ p(x) ର ପଲିନୋମିଆଲ୍ g(x) ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ?

(i) $p(x) = 2x^3 + x^2 – 2x – 1,\ g(x) = x + 1$

(ii) $p(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1, g(x) = x + 2$

(iii) $p(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6, g(x) = x - 3$

6. ପଲିନୋମିଆଲ୍ p(x) ର $x - 1$ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେଲେ k ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $p(x) = x^2 + x + k$ (ii) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(iii) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (iv) $p(x) = kx^2 + 3x + k$

7. ଭାଗଶେଷ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗରେ ଭାଗଶେଷ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $(x^4 - 1) \div (x + 1)$ (ii) $(x^3 - 3x + 7) \div (x - 2)$

(iii) $(x^2 - 3x + 2) \div (x+3)$ (iv) $(2x^2 - x - 1) \div (2x-1)$

8. ଉତ୍ପାଦକ ଉପପାଦ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗରେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $x^2 - 7x + 12$ (ii) $x^2 - 3x - 4$

(iii) $x^3 - 2x^2 - x + 2$ (iv) $y^3 + y^2 - 2y - 2$

9. ଯଦି $x^2 - 1$, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଗୁଣନୀୟକ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $a + c + e = b + d = 0$

10. ଯଦି $(x - 1)$, $x^2 + mx + 1$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକ ହୁଏ, ତେବେ ପ୍ରମାଣ କରଯେ $(x - m)$, x^3+3x^2+3x+2 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଏକ ଉତ୍ପାଦକ ହେବ ।

11. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $x^2 + 2x + 3$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର କୌଣସି ଜିରୋ ନାହିଁ ।

12. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, 1, –1 ଓ 3 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର $x^3 - 3x^2 - x + 3$ ର ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ଜିରୋ ଅଟନ୍ତି ।

13. 'b' ର କେଉଁ ମାନ ପାଇଁ $x^3 - 3x^2 + bx - 6$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର $(x - 3)$ ଦ୍ୱାରା ବିଭାଜ୍ୟ ?

14. ଯଦି $x^2 - bx + c = (x + p)(x - q)$ ହୁଏ ତେବେ $x^2 - bxy + cy^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

3.7 ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ (Factorisation of Polynomials) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସହ ପରିଚିତ । ନିମ୍ନ କେତେ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗରେ ବିଭିନ୍ନ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଥିଲା । ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା –

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, $(x + a)(x+b) = x^2 + (a+b)x+ab$ ଇତ୍ୟାଦି ।

ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଗୁଡ଼ିକର ଗ.ସା.ଗୁ. ଏବଂ ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ ନିମିତ୍ତ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣର ବହୁଳ ଆବଶ୍ୟକତା ରହିଛି । ସେଥିପାଇଁ କେତେକ ଅଧିକ ସୂତ୍ର ବା ଅଭେଦର ଆଲୋଚନା ଆବଶ୍ୟକ ।

କୌଣସି ଯୌଗିକ ସଂଖ୍ୟାକୁ କେତେକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣନୀୟକ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯିବା ବିଷୟ ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଅବଗତ ଅଛ । ସେହିପରି ବୀଜଗାଣିତିକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌କୁ କେତେକ ବୀଜଗାଣିତିକ ମୌଳିକ ରାଶିର ଗୁଣନୀୟକ ରୂପେ ମଧ୍ୟ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଥାଏ । ଏହି ପ୍ରକାର ପ୍ରକାଶନ ପ୍ରଣାଳୀକୁ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ (Factorisation) କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଉତ୍ପନ୍ନ ମୌଳିକ ରାଶିଗୁଡ଼ିକୁ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଗୁଣନୀୟକ ବା ଉତ୍ପାଦକ (Factors) କୁହାଯାଇଥାଏ ।

ଅଭେଦ - 1: $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ କିମ୍ବା $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$

ପ୍ରମାଣ : ବାମପକ୍ଷ = $(a + b)^3 = (a + b)^2 \times (a + b)$ (ସଂଜ୍ଞା)

$= (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$

$= a^2(a + b) + 2ab(a + b) + b^2(a + b)$

$= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3$

$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$

$= a^3 + b^3 + 3ab(a + b) =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab\,(a + b)$

ଅଭେଦ - 2 : $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ କିମ୍ବା $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3\,ab\,(a - b)$

ପ୍ରମାଣ : ଅଭେଦ (1) ରୁ $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ ପାଇଛେ । ଏଠାରେ b ପରିବର୍ତ୍ତେ –b ଲେଖିଲେ ପାଇବା $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$

$\Rightarrow (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$

ଅଭେଦ - 1 ଓ ଅଭେଦ - 2 ରୁ ପାଇବା $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$ ଏବଂ

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$

ଅଭେଦ - 3 : $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$

ପ୍ରମାଣ : ଅଭେଦ - 1 ରୁ ପାଇବା :

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (a + b)\,\{(a + b)^2 - 3ab\}$

$= (a + b)\,(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2) =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$

ଅଭେଦ - 4 : $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a + ab + b^2)$

ପ୍ରମାଣ : ଅଭେଦ - 3 ରୁ ପାଇଲେ $a^3 + b^3 = (a + b)\,(a^2 - ab + b^2)$

ଏଠାରେ 'b' ପରିବର୍ତ୍ତେ (–b) ଲେଖିଲେ ପାଇବା $a^3 - b^3 = (a - b)\,(a^2 + ab + b^2)$

ବି.ଦ୍ର. : ଅଭେଦ (1) ଓ (2) ରୁ ପକ୍ଷାନ୍ତରଣ ଦ୍ୱାରା ଅଭେଦ (3) ଓ ଅଭେଦ (4) କୁ ମଧ୍ୟ ପାଇ ପାରିବା ।

ଅଭେଦ - 5 : $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)\,(a^2 - ab + b^2)$

ପ୍ରମାଣ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ $= a^4 + a^2b^2 + b^4 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - a^2b^2$

$= (a^2)^2 + 2.a^2.b^2 + (b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2$

$= (a^2 + b^2 + ab)\,(a^2 + b^2 - ab)$

$= (a^2 + ab + b^2)\,(a^2 - ab + b^2) =$ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱ

$\therefore a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 + ab + b^2)\,(a^2 - ab + b^2)$

ଆଲୋଚିତ ଅଭେଦଗୁଡ଼ିକ ସାହାଯ୍ୟରେ ଉଚ୍ଚତର ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ କେତେକ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସମ୍ଭବ । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

1. $x^6 + y^6 = (x^2)^3 + (y^2)^3$

$= (x^2 + y^2)\,\{(x^2)^2 - x^2.y^2 + (y^2)^2\}$ (ଅଭେଦ - 3)

$= (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$

$\therefore\ x^6 - y^6 = (x^2 + y^2) - (x^4 - x^2y^2 + y^4)$

2. $x^6 - y^6 = (x^2)^3 - (y^2)^3$

$= (x^2 - y^2)\{(x^2)^2 + x^2.y^2 + (y^2)^2\}$ (ଅଭେଦ - 4)

$= (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4)$

$\therefore\ x^6 - y^6 = (x^2 - y^2)(x^4 + x^2y^2 + y^4) = (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

ଅଭେଦ - 6 : $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

ପ୍ରମାଣ : ବାମପାର୍ଶ୍ୱ = $a^3+b^3+c^3-3abc$

$= (a^3+b^3)+c^3-3abc$

$= (a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$ .... (ଅଭେଦ - 3)

$= \{(a+b)^3+c^3\}-3ab(a+b)-3abc$

$= \{(a+b)+c\}^3-3(a+b)c\{(a+b)+c\}-3ab(a+b+c)$

$= (a+b+c)^3-3(a+b)c(a+b+c)-3ab(a+b+c)$ (ଅଭେଦ - 3)

$= (a+b+c)\{(a+b+c)^2-3c(a+b)-3ab\}$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca-3ca-3bc-3ab)$

$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

$\therefore a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

ଅଭେଦ - 7 : $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax+p)(ax+q)$ ଯେତେବେଳେ $a \neq 0, b = p + q$ ଏବଂ $ac = pq$

ପ୍ରମାଣ : $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(a^2x^2 + abx + ac)$

$= \frac{1}{a}\{a^2x^2 + a(p+q)x + pq\}$ (b ସ୍ଥାନରେ p + q ଏବଂ ac ସ୍ଥାନରେ pq ଲେଖି)

$= \frac{1}{a}(a^2x^2+apx+aqx+pq) = \frac{1}{a}\{ax(ax+p)+q(ax+p)\}$

$= \frac{1}{a}(ax+p)(ax+q)$

$\therefore$ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ax^2+bx+c ର ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଉତ୍ପାଦକ = $\frac{1}{a}(ax+p)(ax+q)$

ସୂଚନା : ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ ax^2+bx+c ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ ଯଦି x ଥିବା ପଦର ସହଗ b କୁ p ଓ q ଦୁଇଟି ରାଶିର ସମଷ୍ଟି ଏବଂ x^2 ପଦର ସହଗ a ଏବଂ ଧ୍ରୁବକ ପଦ c ର ଗୁଣଫଳକୁ p ଓ q ର ଗୁଣଫଳ ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିହେଉଥିବ ତେବେ, ଉକ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରିହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 26 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : a^3+b^3+a+b

ସମାଧାନ : $a^3+b^3+a+b = (a^3+b^3)+(a+b)$

$= (a+b)(a^2-ab+b^2)+(a+b)$ (ଅଭେଦ - 3)

$= (a+b)(a^2-ab+b^2+1)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 27 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : $125p^3-27q^3-225p^2q+135pq^2$

ସମାଧାନ : $125p^3-27q^3-225p^2q+135pq^2 = 125p^3-225p^2q+135pq^2-27q^3$

$= (5p)^3-3.(5p)^2.3q+3.5p\cdot(3q)^2-(3q)^3 = (5p-3q)^3 = (5p-3q)(5p-3q)(5p-3q)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 28 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : $64a^6-b^6$

ସମାଧାନ : $64a^6-b^6 = (8a^3)^2-(b^3)^2 = (8a^3+b^3)(8a^3-b^3)$ ($\because x^2-y^2 = (x+y)(x-y)$)

$= \{(2a)^3+(b)^3\}\{(2a)^3-(b)^3\}$

$= (2a+b)\{(2a)^2-2a.b+(b)^2\}(2a-b)\{(2a)^2+2a.b+(b)^2\}$ (ଅଭେଦ - 3 ଏବଂ ଅଭେଦ - 4)

$= (2a+b)(4a^2-2ab+b^2)(2a-b)(4a^2+2ab+b^2)$

$= (2a+b)(2a-b)(4a^2-2ab+b^2)(4a^2+2ab+b^2)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 29 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : $x^8+9x^4y^4+81y^4$

ସମାଧାନ: $x^8+9x^4y^4+81y^4 = (x^2)^4+(x^2)^2.(3y)^2+(3y)^4$

$= \{(x^2)^2+x^2.3y+(3y)^2\}\{(x^2)^2-x^2.3y+(3y)^2\}$ (ଅଭେଦ -5)

$= (x^4+3x^2y+9y^2)(x^4-3x^2y+9y^2)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 30 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : $8x^3+27y^3-8+36xy$

ସମାଧାନ: $8x^3+27y^3-8+36xy = (2x)^3+(3y)^3+(-2)^3-3.\ 2x\ .\ 3y\ .\ (-2)$

$= \{2x+3y+(-2)\}\{(2x)^2+(3y)^2+(-2)^2-2x.3y-2x(-2)-3y(-2)\}$ (ଅଭେଦ -6)

$= (2x+3y-2)(4x^2+9y^2+4-6xy+4x+6y)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 31 : ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ : $14m^3-4n^3+9m^2n$

ସମାଧାନ: $14m^3-4n^3+9m^2n = \frac{1}{2}(28m^3-8n^3+18m^2n)$

$= \frac{1}{2}(27m^3+m^3-8n^3+18m^2n) = \frac{1}{2}\{(3m)^3+(m)^3+(-2n)^3-3.3m.m.(-2n)\}$

$= \frac{1}{2}(3m+m-2n)\{(3m)^2+(m)^2+(-2n)^2-3m.m-m(-2n)-(-2n).3m\}$ (ଅଭେଦ -6)

$= \frac{1}{2}(4m-2n)(9m^2+m^2+4n^2-3m^2+2mn+6mn)$

$= \frac{1}{2}$ (4m–2n) ($7m^2+4n^2+8mn$)

$= \frac{1}{2}$ 2(2m–n) ($7m^2+4n^2+8mn$) = (2m–n) ($7m^2+8mn+4n^2$) (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 32 : $3x^2 - 2x - 8$ ଉତ୍ପାଦକକୀକରଣ ଦର୍ଶାଅ :

ସମାଧାନ: ଅଭେଦ - 7 ଅନୁଯାୟୀ – 2 ବଦଳରେ {(–6) + 4} ଲେଖିବା

କାରଣ (–6) x 4 = (–8) x 3 [∵ $ax^2 + bx + c$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ରେ b = p+q ଏବଂ ac = pq]

ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ = $3x^2 - 2x - 8 = 3x^2 + (-6 + 4)\,x - 8$

$= 3x^2 - 6x + 4x - 8 = 3x\,(x-2) + 4\,(x-2) = (x-2)(3x+4)$ (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ସମାଧାନ : ସିଧାସଳଖ $ax^2 + bx + c = \frac{1}{a}(ax + p)(ax + q)$ ସୂତ୍ର ପ୍ରୟୋଗ କରିବା

ଯେତେବେଳେ p = – 6 ଏବଂ q = 4

$3x^2 + (-2)x + (-8) = \frac{1}{3}(3x-6)(3x+4) = (x-2)(3x+4)$

ଅନୁଶୀଳନୀ – 3 (c)

1. ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟିକୁ ବାଛି ଲେଖ ।

(i) x^2-3x+2 ର ଉତ୍ପାଦକ ଦ୍ୱୟ

(a) (x–2) ଓ (x+1), (b) (x+2) ଓ (x–1), (c) (x–2) ଓ (x–1) (d) (x+2) ଓ (x+1)

(ii) ଏକ ଦ୍ୱିଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକ ଦ୍ୱୟ (x–1) ଓ (x–3) ହେଲେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି

(a) x^2-4x-3 (b) x^2-4x+3 (c) x^2+4x-3 (d) x^2+4x+3

(iii) x^4-y^4 ର ଠିକ୍ ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ବାଛ ।

(a) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$, (b) $(x^2-y^2)(x-y)(x+y)$

(c) $(x^2+y^2)(x+y)^2$ (d) $(x^2+y^2)(x-y)^2$

(iv) $8a^3-b^3-12a^2b+6ab^2$ ର ଉତ୍ପାଦକ ଗୁଡିକ

(a) (2a–b),(2a+b),(2a+b) (b) (2a + b)(2a + b)(2a + b)

(c) (2a–b),(2a–b),(2a+b) (d) (2a – b),(2a – b),(2a – b)

(v) $625+25x^4+x^8$ ର ଉତ୍ପାଦକ ଗୁଡିକ ନିମ୍ନସ୍ଥ କେଉଁଟି $625+25x^4+x^8$ ର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ ।

(a) $(25+5x^2+x^4), (25-5x^2+x^4)$ (b) $(25+5x^2+x^4), (25+5x^2-x^4)$

(c) $(25+5x^4+x^4), (25-5x^4+x^4)$ (d) $(25-5x^4+x^4), (25+5x^4-x^4)$

(vi) $1-a^3+b^3+3ab$ ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ

(a) $(1-a+b)$ (b) $(1-a-b)$ (c) $(1+a+b)$ (d) $(1+a-b)$

(vii) $(2x-3y)^3+(3y-4z)^3+(4z-2x)^3$ ର ଉତ୍ପାଦକ ଗୁଡିକ ହେଲେ

(a) $6(2x-3y)(3y-4z)(2z-x)$ (b) $3(2x-3y)(3y-4z)(2z-x)$

(c) $60xyz$ (d) ଏଥି ମଧ୍ୟରୁ କୌଣସିଟି ନୁହେଁ ।

(viii) $(28)^3+(-15)^3+(-13)^3$ ର ସରଳୀକୃତ ମାନ

(a) 8190 (b) 16380 (c) 24570 (d) 4095

(ix) $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3$ ର ମାନ

(a) $3abc$ (b) $3a^3b^3c^3$ (c) $3(a-b)(b-c)(c-a)$ (d) $\{a-(b+c)\}^3$

(x) $2x^2-x-1$ ର ଗୋଟିଏ ଉତ୍ପାଦକ

(a) $2x-1$ (b) $x+1$ (c) $x-1)$ (d) $x+2$

2. ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $2x^2-x-1$ (ii) $2x^2-3x+1$ (iii) $5x^2-x-4$

(iv) $4x^2-5x-6$ (v) $3x^2+11x+6$ (vi) $7x^2+x-6$

(vii) $2x^2+5x-7$ (viii) $4x^2-5x+1$ (ix) $4x^2-3x-7$

3. ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $25a^4-16b^2$ (ii) $9-64p^2q^2$ (iii) $8x^3+27y^3$ (iv) $8x^3-27y^3$

(v) $(a+b)^2-9$ (vi) $(2a+5)^2-16$ (vii) $(x+2y)^2-(x-y)^2$ (viii) $4(a+2p)^2-9(2a-p)^2$

(ix) $75(2a-b+1)^2-12(a+b)^2$ (x) $(a+b)^3-8c^3$

(xi) p^4-27pq^6 (xii) $1-(a+2)^3$ (xiii) $8-(2x-3)^3$

(xiv) $320p^6q-5p^2q^7$ (xv) $1+(a+2)^3$ (xvi) $8+(2x-3)^3$

(xvii) $a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$ (xviii) $a^3+9a^2+27a+27$ (xix) $8-36p+54p^2-27p^3$

(xx) $(b-q)^3-(c-q)^3-3(b-c)(b-q)(c-q)$

4. ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) a^4+a^2+1 (ii) $a^4b^4+a^2b^2+1$ (iii) $16a^4+36a^2b^2+81b^4$

(iv) a^8+a^4+1 (v) x^4+4 (vi) $2a^4+8b^4$

(vii) $36a^4+9b^4$ (viii) $4a^4+7a^2+16$ (ix) $a^4+2a^2b^2+9b^4$

(x) a^4-3a^2+1 (xi) $25a^4-19a^2b^2+9b^4$ (xii) $9x^2+y^2+6xy-4z^2$

(xiii) $16-x^2-24y+9y^2$ (xiv) $(a^2-b^2)(x^2-y^2)-4abxy$

(xv) $(a^2+b^2)(x^2-y^2)-2ab(x^2+y^2)$

5. ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କର ।

(i) $a^3 + b^3 + x^3 - 3abx$ (ii) $8a^3 + b^3 + c^3 - 6abc$ (iii) $a^3 + b^3 - 8 + 6ab$

(iv) $l^3 - 27m^3 - n^3 - 9lmn$ (v) $(a-b)^3 + (c-b)^3 + (a-c)^3 - 3(a-b)(b-c)(c-a)$

(vi) $a^6 + 4a^3 - 1$ (vii) $x^3 + 72 - 24x$ (viii) $m^6 + 7m^3 - 8$ (ix) $a^6 + \frac{1}{a^6} + 2 \quad (a \neq 0)$

(x) $r^6 + 45r^3 - 8$ (xi) $16x^3 - 54y^6 - 2z^3 - 36xy^2z$ (xii) $a^3 + b^3 - \frac{1}{27}c^3 + abc$

(xiii) $27a^3 - 8b^6 + 125c^3 + 90ab^2c$ (xiv) $(2x+3)^3 + (3x-2)^3 - (5x+1)^3$

6. $a + b + c = 0$ ହେଲେ ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

7. $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$ ର ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

8. ଦର୍ଶାଅ ଯେ, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x+y+z)\{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2\}$

3.8 : ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଗ.ସା.ଗୁ (H.C.F. of Polynomials) :

ଧନାତ୍ମକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାନଙ୍କର ଗରିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ (ଗ.ସା.ଗୁ) ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଳେଷଣ କରାଯାଇଥାଏ । ଏହା ତୁମେ ପୂର୍ବରୁ ଜାଣିଛ । ପଲିନେମିଆଲଗୁଡ଼ିକର ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପାଇଁ ମଧ୍ୟ ପଲିନେମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ଆବଶ୍ୟକ । ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ନିମିତ୍ତ ନିମ୍ନ ଅଭେଦ (ସୂତ୍ରାବଳୀ) ଗୁଡ଼ିକର ଆବଶ୍ୟକତା ଅଛି ।

ସୂତ୍ର : $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$;

$x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$;

$x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$;

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = (x+y+z)^2$;

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$;

$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 = (x+y)^3$;

$x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = (x-y)^3$;

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$;

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$;

$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$;

$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x+y)(x-y)$;

$x^6 + y^6 = (x^2 + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$;

$x^6 - y^6 = (x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$ ଏବଂ

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2 - ab - bc - ca)$

ଦୁଇ ବା ତତୋଽଧିକ ପଲିନୋମିଆଲଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ପରେ ସେଗୁଡ଼ିକର ଗ.ସା.ଗୁ. (H.C.F.) ଏବଂ ଲ.ସା.ଗୁ. (L.C.M.) ସ୍ଥିର କରାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞା : ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକ ବିଶ୍ଳେଷଣରୁ ମିଳୁଥିବା ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳ ଦତ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଗ.ସା.ଗୁ. ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $36x^2y^3 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times x \times x \times y \times y \times y$

$60xy^2z = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times x \times y \times y \times z$

ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜଣାଯାଏ ଯେ $36x^2y^3$ ରେ 2 ଦୁଇଥର, 3 ଦୁଇ ଥର, x ଦୁଇ ଥର ଓ y ତିନିଥର ଗୁଣନୀୟକ ଭାବରେ ରହିଛି ।

ସେହିପରି $60xy^2z$ ରେ 2 ଦୁଇଥର, 3 ଏକଥର, 5 ଏକଥର, x ଏକଥର, y ଦୁଇଥର ଓ z ଏକଥର ଗୁଣନୀୟକ ଭାବରେ ରହିଛି ।

ଅତଏବ ଉଭୟ ମନୋମିଆଲରେ ଗରିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ଭାବରେ 2 ଦୁଇଥର, 3 ଏକ ଥର, x ଏକଥର, y ଦୁଇଥର ରହିବ ।

ତେଣୁ $36x^2y^3$ ଓ $60xy^2z$ ର ଗ.ସା.ଗୁ. $= 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times y = 12xy^2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 33 :

$30x^2y^3z^4$, $45x^5y^4z^3$ ଓ $75x^3y^5z^6$ ର ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ :

$30x^2y^3z^4 = 2 \times 3 \times 5 \times x^2 \times y^3 \times z^4$

$45x^5y^4z^3 = 3^2 \times 5 \times x^5 \times y^4 \times z^3$

$75x^3y^5z^6 = 3 \times 5^2 \times x^3 \times y^5 \times z^6$

ତେଣୁ ଦତ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ହେଲେ 3, 5, x, y ଓ z ।

3, 3^2 ଓ 3 ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ = 3

5, 5 ଓ 5^2 ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ = 5

x^2, x^5 ଓ x^3 ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ = x^2

y^3, y^4 ଓ y^5 ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ = y^3

ଏବଂ z^4, z^3 ଓ z^6 ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ = z^3

$\therefore$ ଦତ୍ତ ମନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଗ.ସା.ଗୁ. = $3 \times 5 \times x^2 \times y^3 \times z^3 = 15x^2y^3z^3$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 34 : $x^2 - 4$ ଓ $2x^2 + 4x$ ର ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x+2)(x-2)$

$2x^2 + 4x = 2x(x+2)$

$\therefore$ ଗ.ସା.ଗୁ. = $(x+2)$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 35 : $2x^2 - 10x + 12$, $3x^2 - 18x + 27$ ଓ $x^3 - 27$ ର ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $2x^2 - 10x + 12 = 2(x^2 - 5x + 6) = 2(x^2 - 2x - 3x + 6)$

$= 2\{x(x-2) - 3(x-2)\} = 2(x-2)(x-3)$

$3x^2 - 18x + 27 = 3(x^2 - 6x + 9) = 3(x^2 - 2.x.3 + 3^2) = 3(x-3)^2$

$x^3 - 27 = x^3 - 3^3 = (x-3)(x^2 + 3x + 9)$

$\therefore$ ଗ.ସା.ଗୁ. = $x - 3$ (ଉତ୍ତର)

3.9 : ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ମାନଙ୍କର ଲ.ସା.ଗୁ. (Lowest Common Multiple or L.C.M. of Polynomials) :

ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲା ପରି ଲ.ସା.ଗୁ. ସ୍ଥିର କରିବା ପାଇଁ ପ୍ରଥମେ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଆବଶ୍ୟକ ହୋଇଥାଏ । କିନ୍ତୁ ଲ.ସା.ଗୁ. ନିରୂପଣ ପାଇଁ ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକୁ ବଛାଯାଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 36: $8x^2y$, $10y^2z$ ଓ $12xyz^2$ ର ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $8x^2y = 2 \times 2 \times 2 \times x^2 \times y$

$10y^2z = 2 \times 5 \times y^2 \times z$

$12xyz^2 = 2 \times 2 \times 3 \times x \times y \times z^2$

$\because$ 2 ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = 2^3, 3 ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = 3
5 ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = 5, x ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = x^2
y ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = y^2, ଓ z ର ସର୍ବାଧିକ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୁଣନୀୟକ = z^2

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଲ.ସା.ଗୁ. = $2^3 \times 3 \times 5 \times x^2 \times y^2 \times z^2 = 120x^2y^2z^2$ (ଉତ୍ତର)

ସଂଜ୍ଞା : ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ସାଧାରଣ ଗୁଣିତକମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବନିମ୍ନ ଘାତ ବିଶିଷ୍ଟ ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣଫଳକୁ ସମ୍ପୃକ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଗୁଡ଼ିକର ଲ.ସା.ଗୁ. କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 37: $3x^3 - 24$, $8x^2 - 32x + 32$ ଓ $3x^2 + 12x + 12$ ର ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : $3x^3 - 24 = 3(x^3 - 8) = 3(x^3 - 2^3) = 3(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

$8x^2 - 32x + 32 = 8(x^2 - 4x + 4) = 2^3(x-2)^2$

$3x^2 + 12x + 12 = 3(x^2 + 4x + 4) = 3(x + 2)^2$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ଲ.ସା.ଗୁ. = $2^3 \times 3(x+2)^2(x-2)^2(x^2 + 2x + 4)$

$= 24(x + 2)^2(x-2)^2(x^2 + 2x + 4)$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (d)

1. ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର -

(i) xy^2, x^2y (ii) $6a^3b^2$, $8a^2b^3$ (iii) $12a^2b^4c$, $15ab^2c^3$

(iv) x^2y^2, x^3y, xy^3 (v) $144x^3y^9z^7$, $108x^6y^6z^6$

2. ଗ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର -

(i) $x^2 - 1$, $x^2 + x$ (ii) $a^3 - ab^2$, $a^3 - b^3$

(iii) $4a^2 - b^2$, $b^2 - 2ab$ (iv) $(x-1)^3$, $(1-x)^2$

(v) $x^2 - xy + y^2$, $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (vi) $6(a^2 - 4b^2)$, $10(a^3 - 8b^3)$

(vii) $x^2 + 7x + 12$, $x^2 + 9x + 20$ (viii) $4x^3 - 9x$, $16x^3 + 54$, $2x^2 + 5x + 3$

(ix) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$, $a^2 + b^2 - c^2 + 2ab$

(x) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$, $b^2 - c^2 - a^2 - 2ca$, $c^2 - a^2 - b^2 - 2ab$

(xi) $8a^2 - 14ab + 6b^2$, $15a^2 + 18ab - 33b^2$, $9a^2b - 7ab^2 - 2b^3$

(xii) $(a+b)x^2 - (2a+b)bx + ab^2$, $(a-b)x^2 - (2a-b)bx + ab^2$

(xii) $c^2 - 2ab - a^2 - b^2$, $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$, $b^2 - 2ca - c^2 - a^2$

(xiv) $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc$, $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$

3. ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର -

(i) $3a^3b$, $4a^2b$ (ii) $6a^2b^3$, $4a^3b^4$ (iii) $20a^2b^3c^4$, $34a^3c^5$

(iv) $3a^2b$, $4ab^2$, $6ab$ (v) $25x^3y^2z^2$, $30x^2y^3z^3$, $x^3y^3z^2$

4. ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର -

(i) $a^2 + ab$, $ab - b^2$ (ii) $3(x^2 - y^2)$, $4(x^2 + xy)$

(iii) $x^3 + y^3$, $x^2y + xy^2$ (iv) $6a^3b - 12a^2b^2$, $8a^3 - 64b^3$

(v) $(x-y)^3$, $x^2 - y^2$ (vi) $x^2 - xy$, $(x-y)^2$, $x^2 - y^2$

(vii) $6(a+b)^2$, $8(a^2-b^2)$, $12(a-b)^2$ (viii) $2x^2 + 5x - 3$, $4x^2 - 4x + 1$

(ix) $3a^2 + 8a + 4$, $a^2 + 2a$ (x) $6x^2 - 5x - 6$, $4x^3 - 12x^2 + 9x$

(xi) $3x^3 + 5x^2 - 2x$, $6x^2 + 14x + 4$, $9x^3 - x$

(xii) $x^2 + xy + yz + zx$, $y^2 + xy + yz + zx$, $z^2 + xy + yz + zx$

(xiii) $a^2 - ab - ac + bc$, $b^2 - bc - ab + ca$, $c^2 - ca - bc + ab$

(xiv) $a^2 - b^2 - c^2 - 2bc$, $b^2 - c^2 - a^2 - 2ca$, $c^2 - a^2 - b^2 - 2ab$

(xv) $a^4 + a^2b^2 + b^4$, $a^3 + b^3$, $a^3 - b^3$

(xvi) $a^6 - b^6$, $(a+b)^3$, $a^2 - b^2$

(xvii) $a^3 + b^3 - 1 - 3ab$, $a^3 + (b-1)^3$, $a^2 - 2a + 1 - b^2$

(xviii) $(x-y)^3 + (y-z)^3 + (z-x)^3$, $(x-y)^3 - (z-y)^3 - (x-z)^3$

3.10 : ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ (Algebraic Rational Expression) :

ଯଦି m ଓ n ପୂର୍ଣ୍ଣସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $n \neq 0$ ହୁଏ, ତେବେ $\frac{m}{n}$ କୁ ଏକ ପରିମେୟ ସଂଖ୍ୟା (Rational Number) କୁହାଯାଏ । m କୁ ଲବ (Numerator) ଓ n କୁ ହର (Denominator) କହନ୍ତି ।

ସେହିପରି ଯଦି p(x) ଓ q(x) ଦ୍ୱୟ x ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ହୁଅନ୍ତି ଏବଂ $q(x) \neq 0$ ହୁଏ ତେବେ, $\frac{p(x)}{q(x)}$ କୁ ଏକ **ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ** କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ p(x) ଲବ ଓ q(x) ହର ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ: $\frac{3}{x-2}$ ଏକ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ହେବ ଯେତେବେଳେ $x \neq 2$ । ଏହାର ଲବ 3 ଓ ହର $x-2$

ସେହିପରି $\frac{2x+3}{x^2-5x+6}$ ମଧ୍ୟ ଏକ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଯେପରିକି $x \neq 2$ ବା 3 । କାରଣ $x = 2$ ବା 3 ହେଲେ $x^2 - 5x + 6 = 0$ ହେବ ।

3.10.1 ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶର ଲଘିଷ୍ଠ ରୂପ :

ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶର ଲବ ଓ ହର ମଧ୍ୟରେ ଯଦି 1 ଭିନ୍ନ କୌଣସି ସାଧାରଣ ଉତ୍ପାଦକ ନ ଥାଏତେବେ ତାହାକୁ ଲଘିଷ୍ଠ ଆକୃତି ବିଶିଷ୍ଟ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ କୁହାଯାଏ ।

ତେଣୁ ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିପ୍ରକାଶକୁ ଲଘିଷ୍ଠ ଆକାରରେ ପରିଣତ କରିବାକୁ ହେଲେ ତା'ର ଲବ ଓ ହରକୁ ଉତ୍ପାଦକରେ ବିଶ୍ଲେଷଣ କରି ଉଭୟଙ୍କୁ ସେମାନଙ୍କ ଗରିଷ୍ଠ ସାଧାରଣ ଗୁଣନୀୟକ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ- 38 : $\dfrac{24x^3y^2}{30xy^3}$ କୁ ଲଘିଷ୍ଠ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମାଧାନ : $\dfrac{24x^3y^2}{30xy^3} = \dfrac{6xy^2 \times 4x^2}{6xy^2 \times 5y} = \dfrac{4x^2}{5y}$ (ଉତ୍ତର) (ଲକ୍ଷ୍ୟକର ଏଠାରେ ଲବ ଓ ହରର ଗ.ସା.ଗୁ. $6xy^2$)

ଉଦାହରଣ- 39 : ଲଘିଷ୍ଠ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କର $\dfrac{x^4y^2 - x^2y^4}{x^4y^3 - x^3y^4}$ $(x \neq y)$

ସମାଧାନ : $\dfrac{x^4y^2 - x^2y^4}{x^4y^3 - x^3y^4} = \dfrac{x^2y^2(x^2 - y^2)}{x^3y^3(x-y)} = \dfrac{x^2y^2(x+y)(x-y)}{x^3y^3(x-y)} = \dfrac{x+y}{xy}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 40 : $\dfrac{a^2}{a-1}$ ରୁ $\dfrac{a^3}{a^2-1}$ ବିୟୋଗ କର ।

ସମାଧାନ : $\dfrac{a^2}{a-1} - \dfrac{a^3}{a^2-1} = \dfrac{a^2}{a-1} - \dfrac{a^3}{(a+1)(a-1)}$

$= \dfrac{a^2(a+1) - a^3}{(a+1)(a-1)} = \dfrac{a^3 + a^2 - a^3}{(a+1)(a-1)} = \dfrac{a^2}{(a+1)(a-1)}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 41: $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)}$ ଓ $\dfrac{1}{(y-z)(y-x)}$ କୁ ଯୋଗ କର ।

ସମାଧାନ : $\dfrac{1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{(y-z)(y-x)} = \dfrac{1}{(x-y)(x-z)} + \dfrac{1}{(y-z)\{-(x-y)\}}$

$= \dfrac{y - z + \{-(x-z)\}}{(x-y)(x-z)(y-z)}$ ($x-y$ ଓ $y-x$ ଦୁଇଟି ଉତ୍ପାଦକ ଥିବାରୁ $y-x$ କୁ $-(x-y)$ ରୂପେ ନେବା ଦ୍ୱାରା ଲ.ସା.ଗୁ. ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ସୁବିଧାଜନକ)

$= \dfrac{y - z - x + z}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \dfrac{y-x}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \dfrac{-(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = \dfrac{-1}{(x-z)(y-z)}$ (ଉତ୍ତର)

3.10.2. ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶଗୁଡ଼ିକର ଗୁଣନ ଓ ହରଣ :

ସଂଜ୍ଞା : $\dfrac{p(x)}{q(x)} \times \dfrac{r(x)}{t(x)} = \dfrac{p(x).r(x)}{q(x).t(x)}$ (ଗୁଣନ) ଏବଂ $\dfrac{p(x)}{q(x)} \div \dfrac{r(x)}{t(x)} = \dfrac{p(x).t(x)}{q(x).r(x)}$ (ହରଣ)

ଉଦାହରଣ - 42 : ଗୁଣଫଳ ସ୍ଥିର କର : $\dfrac{x^3 + 8y^3}{x^3 - 2x^2y} \times \dfrac{x^2 - 4xy + y^2}{x^2 - 2xy + 4y^2}$

ସମାଧାନ : $\dfrac{x^3 + 8y^3}{x^3 - 2x^2y} \times \dfrac{x^2 - 4xy + y^2}{x^2 - 2xy + 4y^2} = \dfrac{(x)^3 + (2y)^3}{x^2(x-2y)} \times \dfrac{(x-2y)^2}{x^2 - 2xy + 4y^2}$

$= \dfrac{(x+2y)(x^2 - 2xy + 4y^2)}{x^2(x-2y)} \times \dfrac{(x-2y)^2}{x^2 - 2xy + 4y^2}$

$= \dfrac{(x+2y)(x-2y)}{x^2} = \dfrac{x^2 - 4y^2}{x^2}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 43: $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)$କୁ $\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$ ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କର ।

ସମାଧାନ : $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right) \div \left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$

$$= \frac{x(x-y)+y(x+y)}{(x+y)(x-y)} \div \frac{x(x+y)-y(x-y)}{(x-y)(x+y)}$$

$$= \frac{x^2-xy+xy+y^2}{x^2-y^2} \div \frac{x^2+xy-xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \div \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = 1$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 44 : ସରଳ କର : $\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}\right)\div\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) \times \frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}$

ସମାଧାନ : $\left(\frac{a^3}{b^3}-\frac{b^3}{a^3}\right)\div\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right) \times \frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2} = \frac{a^6-b^6}{a^3b^3} \div \frac{a^2-b^2}{ab} \times \frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2}$

$$= \frac{(a^2)^3-(b^2)^3}{a^3b^3} \times \frac{ab}{a^2-b^2} \times \frac{a^2b^2}{a^2+ab+b^2} = \frac{(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)}{(a^2-b^2)(a^2+ab+b^2)} = \frac{a^4+a^2b^2+b^4}{a^2+ab+b^2}$$

$$= \frac{(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)}{(a^2+ab+b^2)} = a^2-ab+b^2$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- 45 : ସରଳ କର : $\dfrac{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}+3}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}}$

ସମାଧାନ: $\dfrac{\frac{a}{x-a}+\frac{b}{x-b}+\frac{c}{x-c}+3}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}} = \dfrac{\frac{a}{x-a}+1+\frac{b}{x-b}+1+\frac{c}{x-c}+1}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}}$

$$= \dfrac{\frac{a+x-a}{x-a}+\frac{b+x-b}{x-b}+\frac{c+x-c}{x-c}}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}} = \dfrac{\frac{x}{x-a}+\frac{x}{x-b}+\frac{x}{x-c}}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}}$$

$$= \dfrac{x\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}\right)}{\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}+\frac{1}{x-c}} = x$$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ- **46 :** ସରଳ କର : $\dfrac{a^3+b^3-c^3+3abc}{a^3+(b-c)^3} \times \dfrac{a^3-(b+c)^3}{a^3-b^3-c^3-3abc}$

ସମାଧାନ : $\dfrac{a^3+b^3-c^3+3abc}{a^3+(b-c)^3} \times \dfrac{a^3-(b+c)^3}{a^3-b^3-c^3-3abc}$

$$= \frac{(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)}{(a+b-c)[a^2-a(b-c)+(b-c)^2]} \times \frac{(a-b-c)[a^2+a(b-c)+(b-c)^2]}{(a-b-c)(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ac)}$$

$$= \frac{(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)}{(a^2+b^2+c^2-ab+ac-2bc)} \times \frac{(a^2+b^2+c^2+ab-ac-2bc)}{(a^2+b^2+c^2+ab-bc+ac)}$$ (ଉତ୍ତର)

3.10.3 କ୍ରମିକ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ :

$\dfrac{a}{b+\dfrac{c}{d+\dfrac{e}{f}}}$ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ପରିପ୍ରକାଶକୁ କ୍ରମିକ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ (continued rational expression) ବା (continued fraction) କୁହାଯାଏ । ଏହାକୁ ସରଳ କରିବା ପାଇଁ ଏହାର ସର୍ବନିମ୍ନ ଅଂଶରୁ ସରଳ କରିବା ଆରମ୍ଭ କରି କ୍ରମଶଃ ଉପର ଆଡ଼କୁ ଯିବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ଉଦାହରଣ- **47 :** ସରଳ କର : $\dfrac{a}{a-\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-a}}}$

ସମାଧାନ:

$$\frac{a}{a-\dfrac{1}{a-\dfrac{a}{1-a}}} = \frac{a}{a-\dfrac{1}{\dfrac{a-a^2-a}{1-a}}} = \frac{a}{a-\dfrac{1}{\dfrac{-a^2}{1-a}}}$$

$$= \frac{a}{a-\dfrac{1-a}{-a^2}} = \frac{a}{a+\dfrac{1-a}{a^2}} = \frac{a}{\dfrac{a^3+1-a}{a^2}}$$

$$= a \times \frac{a^2}{a^3-a+1} = \frac{a^3}{a^3-a+1}$$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (e)

1. ଠିକ୍ ଉକ୍ତି ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ କୋଠରୀ ମଧ୍ୟରେ ✔ ଚିହ୍ନ ଓ ଭୁଲ ଉକ୍ତି ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ କୋଠରୀ ମଧ୍ୟରେ ✗ ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।

(i) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=\dfrac{x+y}{5}$ ☐ (ii) $\dfrac{x}{y-z}-\dfrac{x}{z-y}=0$ ☐

(iii) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-x}=0$ ☐ (iv) $\frac{x-y}{z}+\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}=0$ ☐

(v) $\frac{x-1}{x}+\frac{y-1}{y}=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ ☐ (vi) $\frac{1}{x-y}+\frac{1}{y-z}+\frac{1}{z-x}=0$ ☐

2. ସରଳ କର:

(i) $\frac{1}{x+y}+\frac{1}{x-y}$ (ii) $\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}$ (iii) $\frac{a-b}{ab}+\frac{b-c}{bc}+\frac{c-a}{ca}$

(iv) $\frac{x-y}{x+y}-\frac{x+y}{x-y}$ (v) $\frac{1}{x^2-y^2}-\frac{1}{(x-y)^2}$ (vi) $\frac{a^2}{a+b}-a+b$

(vii) $\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{x-2y}+\frac{2x}{4y^2-x^2}$ (viii) $\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}+\frac{a^2+b^2}{b^2-a^2}$

(ix) $\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$ (x) $\frac{3x+1}{x-3}-\frac{x-3}{3x+9}-\frac{5x^2+24x}{2x^2-18}$

3. ସରଳ କର:

(i) $\frac{x^3y}{az^2}\times\frac{y^3z}{bx^2}\times\frac{z^3x}{cy^2}$ (ii) $\frac{x-y}{x+y}\times\frac{x^2+xy}{x^2y-y^3}$ (iii) $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\times\frac{x^3-y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$

(iv) $\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x-14}\times\frac{x^3+8}{x^3-8}$ (v) $\left(1+\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\left(1-\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)$

(vi) $\frac{x^2-y^2}{x-z}\times\frac{x^2-z^2}{xy+y^2}\times\left(x+\frac{xy}{x-y}\right)$ (vii) $\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)\times\frac{a^2-b^2}{2(a^2+b^2)}$

(viii) $\left(\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x-y}\right)\div\left(\frac{x}{x-y}-\frac{y}{x+y}\right)$ (ix) $\frac{x^3+y^3}{(x-y)^2+3xy}\div\frac{(x-y)^2-3xy}{x^3-y^3}\times\frac{xy}{x^2-y^2}$

(x) $\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}\div\frac{a^4-b^4}{2ab(a-b)}\times\frac{a^2-b^2}{a}$ (xi) $\frac{a^2+3a-18}{a^2-4}\div\frac{a^2-36}{a^2-5a-14}$

(xii) $\frac{3a^2+a-4}{2a^2-a-3}\div\frac{3a^2-2a-8}{2a^2-7a+6}$

4. ସରଳ କର:

(i) $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}}$ (ii) $\dfrac{a}{a-\dfrac{a-1}{1-\dfrac{1}{a+1}}}$ (iii) $\dfrac{y}{y^2-\dfrac{y^3-1}{y+\dfrac{1}{y+1}}}$ (iv) $\dfrac{x}{x-\dfrac{1}{x-\dfrac{x}{1+x}}}$

■ ■ ■

ବୀଜଗାଣିତିକ ସମୀକରଣ
(ALGEBRAIC EQUATION)

4.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ସମୀକରଣ ଓ ଅଭେଦ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ଜାଣିବା ସହ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କିପରି ହୁଏ ସେ ବିଷୟରେ ଅବଗତ ଅଛ । ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ । ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଆଧାରରେ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସଂପୃକ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା ଏବଂ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ସହ ଜଡ଼ିତ କିଛି ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ।

4.2 ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଘାତୀ ସମୀକରଣ (Linear equation in one variable):

ତୁମେମାନେ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ସହିତ ପୂର୍ବରୁ ପରିଚିତ । ତେଣୁ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଏହାର ବିଶଦ ଆଲୋଚନା ନ କରି କେବଳ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଆବଶ୍ୟକ ତଥ୍ୟକୁ ସ୍ମରଣ କରାଇ ଦିଆଯାଉଅଛି ।

(i) ଯଦି a ଓ b ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଧ୍ରୁବକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା $(a \neq 0)$ ଓ x ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ହୁଏ, ତେବେ $ax + b = 0$କୁ x ରେ ଗୋଟିଏ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $ax + b$ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$, ଯେଉଁଠାରେ $a, b \in R, a \neq 0$ । ଉକ୍ତ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସଂପୃକ୍ତ ସମୀକରଣ $p(x) = 0$ କୁ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଘାତୀ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

(ii) x ର ଯେଉଁମାନ ପାଇଁ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହୁଏ ତାହାକୁ ସମୀକରଣଟିର **ବୀଜ ବା ମୂଳ (root) ବା ସମାଧାନ (solution)** କୁହାଯାଏ । $ax + b = 0$ $(a \neq 0)$ ସମୀକରଣର ମୂଳ $= \frac{-b}{a}$ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ମୂଳ ଥାଏ ।

(iv) ଯେଉଁ ସମୀକରଣର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ହୁଏ ତାହାକୁ **ସଙ୍ଗତ (Consistent)** ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ । ଅନ୍ୟ ସମୀକରଣକୁ **ଅସଙ୍ଗତ (in-consistent)** ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ । ।

(v) ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ସମୀକରଣର ମୂଳ ସମାନ ସେହି ସମୀକରଣ ଦୁଇଟିକୁ ପରସ୍ପର **ଅନୁରୂପ (Equivalent)** ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $x + 2 = 0$ ଓ $2x + 6 = 2$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅନୁରୂପ, କାରଣ $x = -2$ ହେଲେ ଉଭୟ ସମୀକରଣ ସିଦ୍ଧ ହୁଅନ୍ତି ।

(vi) x ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ଯଦି ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହୁଏ, ତେବେ ଏହାକୁ ସମୀକରଣ ନ କହି **ଅଭେଦ (Identity)** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $2(x-1) + 1 = 3 - (4 - 2x)$ ଉକ୍ତିଟି ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଉ ।

$\Rightarrow 2x - 2 + 1 = 3 - 4 + 2x \Rightarrow 2x - 1 = 2x - 1$

$\Rightarrow 2x = 2x \Rightarrow x = x \Rightarrow x - x = 0$

ଏଥିରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, x ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ $x - x = 0$ ସତ୍ୟ ।

ତେଣୁ $2(x-1) + 1 = 3 - (4 - 2x)$ ଏକ ସମୀକରଣ ନୁହେଁ । ଏକ ଅଭେଦ ।

ଉଦାହରଣ - 1 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସଙ୍ଗତ, କେଉଁଟି ଅସଙ୍ଗତ, କେଉଁଟି ଅଭେଦ ଓ କେଉଁ ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $2(x-1) + 1 = 3 - (1-2x)$ (ii) $2(x-5) = x + 1$

(iii) $(2x-1)^2 = 4x(x-1) + 1$ (iv) $6x-30 = 3(x + 1)$

ସମାଧାନ :

(i) $2(x-1) + 1 = 3 - (1-2x) \Rightarrow 2x-2+1 = 3-1+2x$

$\Rightarrow 2x-2x = 3-1+2-1 = 3$

$\Rightarrow 0 = 3$ ଯାହାକି ଅସମ୍ଭବ । ତେଣୁ ଏହି ସମୀକରଣଟି ଅସଙ୍ଗତ ଅଟେ ।

(ii) $2(x-5) = x + 1 \Rightarrow 2x - 10 = x + 1$

$\Rightarrow 2x - x = 1 + 10 \Rightarrow x = 11$

ଏହାର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ହେଉଥିବାରୁ ଏ ସମୀକରଣଟି ସଙ୍ଗତ ଅଟେ ।

(iii) $(2x-1)^2 = 4x(x-1) + 1$

$\Rightarrow (2x)^2 - 2.2x.1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ଓ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ସମାନ । ତେଣୁ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ମାନ ସମାନ ହେବ । ତେଣୁ ଏହା ଏକ ଅଭେଦ ।

(iv) $6x-30 = 3(x + 1) \Rightarrow 6x-30 = 3x + 3$

$\Rightarrow 6x-3x = 30 + 3 = 33 \Rightarrow 3x = 33 \Rightarrow x = 11$

ଏହି ସମୀକରଣଟି ମଧ୍ୟ ସଙ୍ଗତ ଅଟେ ।

ପୁନଶ୍ଚ ଏହି ସମୀକରଣଟି (ii) ସମୀକରଣର ଅନୁରୂପ କାରଣ ଉଭୟ ସମୀକରଣର ମୂଳ ସମାନ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ - 2 : ସମାଧାନ କର : $2(x-1)(x + 4) + 9 = (2x + 3)(x-2)$

ସମାଧାନ : $2(x-1)(x + 4) + 9 = (2x + 3)(x-2)$

$\Rightarrow 2(x^2 + 3x - 4) + 9 = 2x^2 - x - 6$

$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 8 + 9 = 2x^2 - x - 6$

$\Rightarrow 6x + 1 = -6 - x \Rightarrow 7x = -7$

$\Rightarrow x = -1$ (ଉତ୍ତର)

∴ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (–1) ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ସମାଧାନ କର : $\frac{2x-5}{6} - \frac{3x+4}{5} + \frac{7}{2} = 0$

ସମାଧାନ : $\frac{2x-5}{6} - \frac{3x+4}{5} + \frac{7}{2} = 0$

ଏହି ସମୀକରଣର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ତିନିଗୋଟି ପଦର ହର ମାନଙ୍କର ଲ.ସା.ଗୁ. = 30

ସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 30 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ,

$\Rightarrow \frac{2x-5}{6} x 30 - \frac{3x+4}{5} x 30 + \frac{7}{2} x 30 = 0 x 30$

$\Rightarrow 5(2x-5) - 6(3x+4) + 15 \times 7 = 0$

$\Rightarrow 10x - 25 - 18x - 24 + 105 = 0$

$\Rightarrow 10x - 18x = 25 + 24 - 105$

$\Rightarrow -8x = -56 \Rightarrow x = \frac{-56}{-8} = 7$ (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ବୀଜ ଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ରାଶିରୁ ହର ବାଦ୍ ଦେବା ପାଇଁ ପୂର୍ବ ବର୍ଣ୍ଣିତ ହରମାନଙ୍କର ଲ.ସା.ଗୁ. ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୁଣନ ନ କରି ଅନ୍ୟ ଏକ ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନ କରାଯାଇଥାଏ । ନିମ୍ନ ସୋପାନଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

i) ସମୀକରଣର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପରିମେୟ ହର ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ii) ବଜ୍ର ଗୁଣନ ଦ୍ୱାରା ପରିମେୟ ରାଶିର ହରଗୁଡ଼ିକୁ ଅପସାରଣ କରାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ସମୀକରଣଟି $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ଆକାର ଧାରଣ କଲେ D କୁ A ସହିତ ଏବଂ B କୁ C ସହିତ ଗୁଣାଯାଇଥାଏ । ଏହାକୁ **ବଜ୍ରଗୁଣନ (Cross-Multiplication)** ପଦ୍ଧତି କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC$

ସମାଧାନ : $\frac{2x-5}{6} - \frac{3x+4}{5} + \frac{7}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{2x-5}{6} - \frac{3x+4}{5} = \frac{-7}{2} \Rightarrow \frac{5(2x-5) - 6(3x+4)}{30} = \frac{-7}{2}$

$\Rightarrow \frac{10x - 25 - 18x - 24}{30} = -\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{-8x-49}{30} = -\frac{7}{2}$

$\Rightarrow 2(-8x - 49) = -7 \times 30$

$\Rightarrow -16x - 98 = -210$ (ବଜ୍ର ଗୁଣନ କରି)

$\Rightarrow -16x = -210 + 98 = -112$

$\Rightarrow x = \frac{-112}{-16} = 7$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4 : ସମାଧାନ କର : $\frac{3}{x} - \frac{5}{3-x} = \frac{1}{x(3-x)}$ $(x \neq 0, x \neq 3)$

ସମାଧାନ : $\frac{3}{x} - \frac{5}{3-x} = \frac{1}{x(3-x)}$ ସମୀକରଣଟିରେ ଥିବା ପଦଗୁଡ଼ିକ x ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ । ଏହି ପ୍ରକାର ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆମେ ପୂର୍ବ ଆଲୋଚିତ ପରିମେୟ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ପଦଗୁଡ଼ିକର ହରମାନଙ୍କର ଲ.ସା.ଗୁ. ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୁଣନ କରି କିମ୍ବା ଉଭୟ ବାମ ଓ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କରି ବଜ୍ରଗୁଣନ ପ୍ରଣାଳୀ ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନ କରିବାକୁ ହୋଇଥାଏ ।

ଏଠାରେ ହରମାନଙ୍କର ଲ.ସା.ଗୁ. x (3–x) ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ସମୀକରଣଟି

$x(3-x) \times \frac{3}{x} - x(3-x) \times \frac{5}{3-x} = x(3-x) \times \frac{1}{x(3-x)}$ ହେବ ।

$\Rightarrow (3-x) \times 3 - 5x = 1 \Rightarrow 9 - 3x - 5x = 1$

$\Rightarrow -8x = -9 + 1 = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{-8} = 1$ (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : $\frac{3}{x} - \frac{5}{3-x} = \frac{1}{x(3-x)} \Rightarrow \frac{3(3-x)-5x}{x(3-x)} = \frac{1}{x(3-x)}$

$\Rightarrow \frac{9-3x-5x}{x(3-x)} = \frac{1}{x(3-x)} \Rightarrow \frac{9-8x}{x(3-x)} = \frac{1}{x(3-x)}$

$\Rightarrow (9-8x) . (3-x) = x(3-x)$ (ବଜ୍ରଗୁଣନ ଦ୍ୱାରା)

$\Rightarrow 9 - 8x = 1 \Rightarrow 8 = 8x \Rightarrow x = 1$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସମାଧାନ ପରେ ସମୀକରଣଟିର ନିର୍ଣ୍ଣିତ ମୂଳ ଠିକ୍ କି ନୁହେଁ ଜାଣିବା ପାଇଁ ଉକ୍ତ ମୂଳ ଅର୍ଥାତ୍ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଲବ୍ଧ ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସ୍ଥାପନ କରି ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେଉ ଅଛି କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କଲେ ତୁମେ ପାଇଥିବା ଉତ୍ତରଟି ଠିକ୍ କି ଭୁଲ୍ ଜାଣି ପାରିବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (a)

1. 2, 3, 5, 8 ଓ –1 ମାନଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର କେଉଁ ଏକ ବା ଏକାଧିକ ମାନ ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   i) $(x + 1)^2 - 2x = x^2 + 1$ ii) $6(2y - 1) - 5(y+3) = 3(y+5) - 24$

   iii) $(3 - z) + 2(1 + z) = 13 - 2(z + 1)$ iv) $6x + 10 = 2(x + 12) + 9(x - 1)$

   v) $3(x - 4) + 6 = 2(x+2) - 2$ vi) $3x + 9 - (3x - 5) - (5x + 4) = 0$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସଙ୍ଗତ, କେଉଁଟି ଅସଙ୍ଗତ, କେଉଁଟି ଅଭେଦ ଓ କେଉଁମାନେ ଅନୁରୂପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   i) $(5x - 1)^3 = 125x^3 - 15x(5x - 1) - 1$

   ii) $(x - 5)^2 = 2(x - 3) + (x + 2)(x - 2) - 1$

   iii) $4x + 3 - (11x - 18) = 0$

   iv) $3(x + 3)(x - 5) = (x - 3)^2 + (x - 6)(x + 6) + (x + 3)(x - 3) - 9$

   v) $3(x + 2a) - 2b = 2(x + a) + b$, vi) $3(x+2) = 4(2x - 1) - 5(x+3)$

3. ସମାଧାନ କର :

(i) $2(3x - 1) - 3(x+2) = 1$ (ii) $(x+3)(x-5) - 15 = x(x-1)$

(iii) $3(x+a) - b = 2(x+b) + a$ (iv) $(x-5)^2 + 2(x-3) = (x+2)(x-2) - 1$

(v) $(x-3)^2 = 2x(x-1) - x(x+3) - 2$ (vi) $(x+2)^2 = 3x(x+1) - 2x(x-1)$

4. ସମାଧାନ କର

i) $x - \frac{2x-1}{3} = \frac{x-2}{4} + \frac{1}{3}$ ii) $\frac{2-3x}{4} + \frac{3-2x}{5} = 2 - x$ iii) $\frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} + 2 = \frac{x}{12}$

iv) $(2x-1) - \frac{5(x+3)}{6} = \frac{x+5}{2} - 4$ v) $\frac{x-(7-8x)}{9x-(3+4x)} = \frac{2}{3}$ vi) $\frac{x}{5} + \frac{x}{2} = 7$

5. ସମାଧାନ କର

i) $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} = \frac{2}{x+3}$ ii) $\frac{2}{x} + \frac{1}{2x} - \frac{5}{x+2} = 0$ iii) $\frac{2}{x+1} - \frac{3}{2x+2} = \frac{1}{2x+3}$

iv) $\frac{6}{2x+3} + \frac{4}{x-2} = \frac{7}{x+6}$ v) $\frac{2}{x+1} - \frac{6}{2x-1} + \frac{3}{3x+2} = 0$ vi) $\frac{2}{2x-3} + \frac{5}{(2x-3)^2} = \frac{3}{3x-2}$

4.3 ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (Quadratic equation in one variable)

ଯଦି a, b, c ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ x ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି, ତେବେ $p(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ । p(x) ସହ ସଂପୃକ୍ତ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି $p(x) = 0$ ।

ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ରୂପ ହେଉଛି

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in R} \text{ ଓ } \mathbf{a \neq 0}$$

ଏହି ସମୀକରଣରେ a ଓ b କୁ ଯଥାକ୍ରମେ x^2 ଓ x ର ସହଗ ଓ c କୁ ସମୀକରଣର ଧ୍ରୁବକ ପଦ କୁହାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ କୌଣସି ସମୀକରଣର ପଦମାନଙ୍କରେ ଥିବା ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 2 ହେଲେ ସମୀକରଣଟିକୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (Quadratic equation) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : i) $3x^2 - 6x + 8 = 0$ ଏଠାରେ $a = 3, b = -6, c = 8$

ii) $5x^2 + 8x = 0$ ଏଠାରେ $a = 5, b = 8, c = 0$

iii) $7x^2 = 0$ ଏଠାରେ $a = 7, b = 0, c = 0$

iv) $2x^2 - 9 = 0$ ଏଠାରେ $a = 2, b = 0, c = -9$

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ:

i) ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନର ଅର୍ଥ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଯେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେବ ସେହି ମାନଗୁଡ଼ିକୁ ସମୀକରଣର ମୂଳ ବା ବୀଜ (root) କୁହାଯାଏ ।

ii) ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର କେବଳ ଦୁଇଟି ବୀଜ ଥାଏ ।

iii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୀଜ ଦ୍ୱାରା ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହୁଏ ।

iv) ସମୀକରଣଟିର ସମସ୍ତ ପଦକୁ ବାମପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଆଣି ବାମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ପରିପ୍ରକାଶ ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରାଯାଏ; ଫଳରେ ଦୁଇଟି ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ର ଗୁଣଫଳ ଶୂନ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ହୋଇଥାଏ ।

v) ଯଦି x ଓ y ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $xy = 0$ ହୁଏ, ତେବେ $x = 0$ ବା $y = 0$ ହୁଏ ।

ମନେକର $ax^2 + bx + c = (Ex + F)(Gx + H)$

ତେଣୁ $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (Ex + F)(Gx + H) = 0$

$\Rightarrow (Ex + F) = 0$ ବା $(Gx + H) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-F}{E}$ ବା $x = \frac{-H}{G}$

ତେଣୁ $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ହେଲେ, $\frac{-F}{E}$ ଓ $\frac{-H}{G}$

ଉଦାହରଣ- 5 : ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ p(x)ର ଜିରୋ ଦ୍ୱୟ 3 ଓ –1 ହେଲେ ସଂପୃକ୍ତ ସମୀକରଣଟିକୁ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ: $x = 3$ ଏବଂ $x = -1$ ପାଇଁ ସଂପୃକ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି 0 ହେବ ।

$\therefore$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକଦ୍ୱୟ $(x - 3)$ ଓ $(x+1)$

$\therefore$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି $(x - 3)(x+1)$ ଅର୍ଥାତ୍ $x^2 - 2x - 3$ ହେବ ।

$\therefore$ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ସମୀକରଣଟି $x^2 - 2x - 3 = 0$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 6 : ସମାଧାନ କର $3x^2 - 12 = 0$

ସମାଧାନ : $3x^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି)

$\Rightarrow (x + 2)(x - 2) = 0 \quad (\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$

$\Rightarrow x + 2 = 0$ କିମ୍ବା $x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ କିମ୍ବା $x = 2$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜ ଦ୍ୱୟ –2 ଏବଂ 2 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 7 : ସମାଧାନ କର $x^2 - 5x + 4 = 0$

ସମାଧାନ : $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - x + 4 = 0$

$\Rightarrow x(x - 4) - 1(x - 4) = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x - 4 = 0$ ଅଥବା $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 4$ ଅଥବା $x = 1$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ 4 ଏବଂ 1 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : ସମାଧାନ କର : $\frac{x}{x-1} + \frac{10}{7-x} = 4 \quad (x \neq 1,\ x \neq 7)$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି $\frac{x}{x-1} + \frac{10}{7-x} = 4$ (ସମୀକରଣର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସରଳୀ କରଣ କଲେ)

$\Rightarrow \frac{x(7-x)+10(x-1)}{(x-1)(7-x)} = 4 \Rightarrow \frac{7x - x^2 + 10x - 10}{-x^2 + 8x - 7} = 4$

$\Rightarrow 17x - x^2 - 10 = 4(-x^2 + 8x - 7)$

$\Rightarrow 17x - x^2 - 10 - 4(-x^2 + 8x - 7) = 0$

$\Rightarrow 17x - x^2 - 10 + 4x^2 - 32x + 28 = 0$

$\Rightarrow (-x^2 + 4x^2) + (17x - 32x) + (-10 + 28) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 15x + 18 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 5x + 6) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \Rightarrow x(x-3) - 2(x-3) = 0$

$(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$ କିମ୍ବା $x = 3$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟ 2 ଓ 3 । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) $3x^2 - 4x = -4x + 5$ (ii) $x^3 - 2x^2 + 4 = x^3 + 2x$ (iii) $x + \frac{3}{x} = x^2\ (x \neq 0)$

(iv) $x + \frac{1}{x} = 2\ (x \neq 0)$ (v) $(x+3)^2 = 0$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} = 0$

(vii) $3x^2 = 2x + 7$ (viii) $(3x+2)^2 - (x+4)^2 = (x-3)$

(ix) $7x^2 + 9 = 0$ (x) $4x = 3 + 6x^2$

2. ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ ସିଦ୍ଧ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) $x^2 - 3x = 0\ (0,1,2,3)$ (ii) $3x^2 - 12 = 0\ (1,-1,2,-2)$

(iii) $x^2 - 3x + 2\ (0,1,2,3)$ (iv) $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0\ (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

(v) $x^2 - x - 2 = 0\ (1, 0, -1, 2)$

3. ସମାଧାନ କର :

(i) $7x^2 = \frac{1}{28}$ (ii) $5x^2 = 3x$ (iii) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(iv) $(x+1)(x+2) = 30$ (v) $\sqrt{3}x^2 - x - 2\sqrt{3} = 0$

(vi) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ (vii) $x^2 + ax = 2a^2$ (viii) $x^2+2ax+a^2-b^2 = 0$

4. ସମାଧାନ କର।

(i) $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{4}{15}$ (ii) $\frac{5}{3x-2} + \frac{3}{x+2} = 1$

(iii) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{1-x}{3+2x} = 2$ (iv) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{5}{2}$

5.(i) $x^2 - 7x + a = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ବୀଜ 3 ହେଲେ, a ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟ ବୀଜଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(ii) $x^2 + ax - 15 = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ବୀଜ 5 ହେଲେ, a ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟ ବୀଜଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

4.4 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସାହାଯ୍ୟରେ ପାଟୀଗଣିତ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ :

ବୀଜ ଗଣିତର ପ୍ରୟୋଗରେ ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକ ସମାଧାନ ସହଜ ହୋଇଥାଏ। ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସମାଧାନ ଦ୍ୱାରା କିପରି ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନ ଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ସହଜରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ, ତାହା ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣ ମାନଙ୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଅଛି। ସମୟ ସମୟରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଦୁଇଟି ବୀଜ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁ ବୀଜଟି ପ୍ରଶ୍ନଟିର ସର୍ତ୍ତାବଳୀକୁ ପୂରଣ କରିଥାଏ ତାକୁ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଏ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ବୀଜଟି ଅଗ୍ରହଣୀୟ ହୋଇଥାଏ।

ଉଦାହରଣ – 9 : ପାଞ୍ଚ ବର୍ଷ ପୂର୍ବରୁ ଗୋଟିଏ ପିଲାର ବୟସ ଯାହା ଥିଲା ଏବଂ ନଅ ବର୍ଷ ପରେ ତାହାର ବୟସ ଯାହା ହେବ ସେଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 15 ହେଲେ, ପିଲାଟିର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ କେତେ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ପିଲାଟିର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ x ବର୍ଷ ।

5 ବର୍ଷ ପୂର୍ବରୁ ତାହାର ବୟସ $x - 5$ ବର୍ଷ ଥିଲା ଏବଂ 9 ବର୍ଷ ପରେ ତାହାର ବୟସ $x + 9$ ବର୍ଷ ହେବ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $(x - 5)(x + 9) = 15 \Rightarrow x^2 + 4x - 45 = 15$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x - 6x - 60 = 0$

$\Rightarrow x(x + 10) - 6(x + 10) = 0 \Rightarrow (x + 10)(x - 6) = 0$

$\Rightarrow x + 10 = 0$ ଅଥବା $x - 6 = 0 \Rightarrow x = -10$ ଅଥବା $x = 6$

ପିଲାଟିର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ -10 ବର୍ଷ ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ ।

ଅତଏବ ପିଲାଟିର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ 6 ବର୍ଷ ଅଟେ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 10 : ଦୁଇଗୋଟି କ୍ରମିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 272 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ସ୍ଥିର କର।

ସମାଧାନ : ମନେକର କ୍ରମିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି x ଏବଂ $x + 1$ ହେଉ।

$\therefore$ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ $x(x + 1)$ ହେବ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $x(x + 1) = 272 \Rightarrow x^2 + x - 272 = 0 \Rightarrow x^2 + 17x - 16x - 272 = 0$

$\Rightarrow x(x + 17) - 16(x + 17) = 0 \Rightarrow (x + 17)(x - 16) = 0$

$\Rightarrow x + 17 = 0$ ଅଥବା $x - 16 = 0 \Rightarrow x = -17$ ଅଥବା $x = 16$

x ର ଉଭୟ ମୂଲ୍ୟ -17 ଓ 16 ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେଲେ ମଧ -17 ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇ ନଥିବାରୁ ଏହା ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ।

$\Rightarrow x = 16$

$\therefore$ କ୍ରମିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା x ଓ $x+1$ ଯଥାକ୍ରମେ 16 ଓ 17 ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ – 11 : ଗୋଟିଏ ମୋଟର ବୋଟ୍‌ର ସ୍ଥିର ଜଳରେ ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ 15କି.ମି.। ବୋଟ୍‌ଟି ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନରୁ ବାହାରି ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ 30 କି.ମି. ଯାଇ ଫେରି ଆସିବାକୁ ମୋଟ 4ଘଣ୍ଟା 30ମିନିଟ୍ ସମୟ ନେଲା । ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ x କି.ମି.।

ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ ବୋଟ୍ ର ବେଗ = ବୋଟ୍‌ର ସ୍ଥିର ଜଳରେ ବେଗ + ସ୍ରୋତର ବେଗ ଏବଂ

ପ୍ରତିକୂଳରେ ବୋଟ୍‌ର ବେଗ = ବୋଟ୍‌ର ସ୍ଥିର ଜଳରେ ବେଗ – ସ୍ରୋତର ବେଗ ।

$\therefore$ ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ ବୋଟ୍‌ର ବେଗ ଘଣ୍ଟାକୁ $(15 + x)$ କି.ମି. ଓ ପ୍ରତିକୂଳରେ ବୋଟ୍‌ର ବେଗ ଘଣ୍ଟାକୁ $(15 - x)$ କି.ମି.

ଅନୁକୂଳରେ 30 କି.ମି. ଯିବାକୁ ବୋଟ $\frac{30}{15+x}$ ଘଣ୍ଟା ଓ ପ୍ରତିକୂଳରେ 30 କି.ମି.

ଫେରିବାକୁ ବୋଟ୍‌ଟି $\frac{30}{15-x}$ ଘଣ୍ଟା ସମୟ ନେଇଛି।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ ଏହି ଦୁଇ ସମୟର ସମଷ୍ଟି = 4ଘଣ୍ଟା 30ମିନିଟ୍ $= 4\frac{1}{2}$ ଘଣ୍ଟା $= \frac{9}{2}$ ଘଣ୍ଟା।

$\therefore \frac{30}{15+x}+\frac{30}{15-x}=\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{30(15-x)+30(15+x)}{(15+x)(15-x)}=\frac{9}{2}$

$\Rightarrow \frac{450-30x+450+30x}{225-x^2}=\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{900}{225-x^2}=\frac{9}{2}$

$\Rightarrow 900 \times 2 = 9\,(225-x^2) \Rightarrow\ 1800 = 2025 - 9x^2$

$\Rightarrow 9x^2 = 2025 - 1800 = 225$

$\Rightarrow x^2 = 25 = (\pm 5)^2 \ \Rightarrow x = \pm 5$

$\because$ $x = -5$ ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ । ତେଣୁ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ 5 କି.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (c)

1. ଦୁଇଗୋଟି କ୍ରମିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 221 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସ୍ଥିର କର ।
2. କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ତାହାର ବର୍ଗ ସହିତ ସମାନ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର।
3. 51 କୁ ଏପରି ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କର ଯେପରି ଭାଗ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 378 ହେବ।
4. କୌଣସି ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଏହାର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଦୁଇଗୁଣରୁ 1 ସେ.ମି. କମ୍ ଏବଂ ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଠାରୁ 1 ସେ.ମି. ଅଧିକ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
5. କୌଣସି ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ସଲଗ୍ନ ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5x ସେ.ମି. ଓ 3x–1 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 60 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
6. କୌଣସି ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ସଂଖ୍ୟା (Reciprocal)ର ସମଷ୍ଟି $\frac{17}{4}$ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
7. କୌଣସି ଏକ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପ୍ରସ୍ଥ ଅପେକ୍ଷା 8ମି.ଅଧିକ । ଯଦି ଉକ୍ତ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 308 ବର୍ଗ ମି. ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
8. ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀର ପିଲାମାନେ ଭ୍ରମଣରେ ଯିବା ପାଇଁ 3600 ଟଙ୍କା ଭଡ଼ାରେ ଏକ ବସ ବରାଦ କଲେ। କିନ୍ତୁ ଶେଷବେଳକୁ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 3ଜଣ ପିଲା ଓହରି ଯିବାରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକଙ୍କୁ ଆଉ ଚାଳିଶ ଟଙ୍କା ଲେଖାଏଁ ଅଧିକ ଦେବାକୁ ପଡ଼ିଲା। ପ୍ରଥମରୁ କେତେ ପିଲା ଯିବା ପାଇଁ ମନସ୍ଥ କରିଥିଲେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
9. ତିନିଗୋଟି କ୍ରମିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 110 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟା ତିନୋଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
10. ଦୁଇଗୋଟି କ୍ରମିକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 290 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
11. ଏକ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଅପେକ୍ଷା 2 ମିଟର ଅଧିକ। ଯଦି କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 48 ବର୍ଗମିଟର୍ ହୁଏ, ତେବେ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
12. ଏକ ମୋଟର ଲଞ୍ଚ ନଦୀ ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ 36କି.ମି. ଯାତ୍ରା କରି ଯାତ୍ରା ଆରମ୍ଭ ସ୍ଥାନକୁ ଫେରି ଆସିବାକୁ ସମୁଦାୟ 8 ଘଣ୍ଟା ସମୟ ନେଲା। ଯଦି ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ 6 କି.ମି. ହୁଏ ତେବେ ସ୍ଥିର ଜଳରେ ଲଞ୍ଚଟିର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।
13. ଦୁଇଗୋଟି ବର୍ଗାକାର କ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପରଟିର ଦୁଇ ଗୁଣରୁ ଏକ ମିଟର କମ୍। ଯଦି କ୍ଷେତ୍ର ଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର 56 ବର୍ଗମିଟର ହୁଏ ତେବେ ଦୁଇଟି ବର୍ଗ କ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

14. ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅପରଟିର ତିନି ଗୁଣରୁ ଦୁଇ କମ୍। ଯଦି ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ବର୍ଗର ଅନ୍ତର 312 ହୁଏ, ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

15. ଦୁଇଟି ଷ୍ଟେସନ୍ A ଓ B ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 192 କି.ମି.। ଏକ ଦ୍ରୁତଗାମୀ ଟ୍ରେନ୍ A ରୁ B କୁ ଯିବାକୁ ଯେତିକି ସମୟ ନିଏ ଏକ ପାସେଞ୍ଜର ଟ୍ରେନ ତା'ଠାରୁ ଦୁଇଘଣ୍ଟା ଅଧିକ ସମୟ ନିଏ। ଯଦି ପାସେଞ୍ଜର ଟ୍ରେନ୍‌ର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ହାରାହାରି ବେଗ ଦ୍ରୁତଗାମୀ ଟ୍ରେନ୍‌ର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ହାରାହାରି ବେଗ ଠାରୁ 16 କି.ମି. କମ୍ ହୁଏ, ତେବେ ଟ୍ରେନ୍ ଦ୍ୱୟର ହାରାହାରି ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

16. ଗୋଟିଏ ନୌକାର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ସ୍ଥିର ଜଳରେ 11 କି.ମି. । ଏହା ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ 12 କି.ମି. ଗତିକରି ପୁନଶ୍ଚ ଅନୁକୂଳରେ ଫେରିଆସିବାକୁ ମୋଟ 2 ଘଣ୍ଟା 45 ମିନିଟ୍ ସମୟ ନେଲା ତେବେ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

17. ଗୋଟିଏ ଗାଈଗୋଠର ଏକ ଚତୁର୍ଥାଂଶ ଦୃଷ୍ଟିଗୋଚର ହେଉଥିଲେ । ଗୋଠରେ ଥିବା ଗାଈ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳର ଦୁଇଗୁଣ ସଂଖ୍ୟକ ଗାଈ ପାହାଡ଼ର ପାଦଦେଶରେ ଚରୁଥିଲେ ଏବଂ ଅବଶିଷ୍ଟ 15 ଟି ଗାଈ ନଦୀକୂଳରେ ଚରୁଥିଲେ । ତେବେ ଗୋଠରେ କେତୋଟି ଗାଈ ଥିଲେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4.5 ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣ ଓ ସମାଧାନ (Solution of Exponential Equations) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ 'ଘାତ ତତ୍ତ୍ୱ' ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିୟମଗୁଡ଼ିକ ସହ ସୁପରିଚିତ ହୋଇ ସାରିଛ । ସେ ସମସ୍ତ ନିୟମଗୁଡ଼ିକୁ ଭିତ୍ତି କରି ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା ଏହି ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଶିକ୍ଷା କରିବା ।

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

(i) $3^{x+1} = 9$ (ii) $2^x - 4^{2x-1} = 0$

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକରେ ଘାତାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଛନ୍ତି ।

(ଏକାଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇପାରେ)

ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ଏବଂ ଘାତାଙ୍କ **ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହେଉଥିବା ସମୀକରଣକୁ ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣ (Exponential Equation) କୁହାଯାଏ ।**

ଘାତ ତତ୍ତ୍ୱର ଯେଉଁ ତଥ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ କେତେକ ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରିବା ତାହା ହେଉଛି $\mathbf{a > 0,\ a \neq 1, x, y \in R}$ **ହେଲେ,** $\mathbf{a^x = a^y \Rightarrow x = y}$ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପରିମେୟ ତଥା ବାସ୍ତବ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତତତ୍ତ୍ୱର ଆଲୋଚନାରେ ଆମେ ଧନାତ୍ମକ ଆଧାର ନେଇଥିଲେ । $a = 1$ ହେଲେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ x ଓ y ପାଇଁ ମଧ୍ୟ $a^x = a^y$ ହେବ । ତେଣୁ $a^x = a^y \Rightarrow x = y$ ସତ୍ୟ ହେବ ନାହିଁ । ସେହି କାରଣରୁ $a > 0$ ଓ $a \neq 1$ କୁ ସର୍ତ୍ତରୂପେ ନିଆଗଲା ।

ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ ସମୀକରଣ ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଆଧାର କୁ ସମାନ କରିବାକୁ ପଡ଼େ। ଏହା ସମାଧାନ ର ପ୍ରଧାନ ସୋପାନ। ଏହା କିପରି ହେଉଛି ତାହା ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜାଣିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ - 12 : ସମାଧାନ କର : $4^{x+1} = 64$

ସମାଧାନ : $4^{x+1} = 64 \Rightarrow 4^{x+1} = 4^3$ ($\because 64 = 4^3$, ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଆଧାରକୁ 4 କରାଗଲା)

$\Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 3 - 1 = 2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 : ସମାଧାନ କର $2^x - 4^{2x-1} = 0$

ସମାଧାନ : $2^x - 4^{2x-1} = 0 \Rightarrow 2^x = 4^{2x-1}$

$\Rightarrow 2^x = (2^2)^{2x-1}$ ($\because 4 = 2^2$, ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଆଧାର କୁ 2 କରାଗଲା)

$\Rightarrow 2^x = 2^{2(2x-1)} = 2^{4x-2}$ [ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ $(a^n)^m = a^{nm}$ ର ପ୍ରୟୋଗ କରାଗଲା]

$\Rightarrow x = 4x - 2 \Rightarrow x - 4x = -2 \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : ସମାଧାନ କର : $2^{x+2} \times 3^{x-2} = 96$

ସମାଧାନ : $2^{x+2} \times 3^{x-2} = 96 \Rightarrow 2^x \times 2^2 \times 3^x \times 3^{-2} = 96$

$\Rightarrow 2^x \times 3^x = \frac{96}{2^2 \times 3^{-2}} \Rightarrow (2 \times 3)^x = 96 \times \frac{9}{4} \Rightarrow 6^x = 216 \Rightarrow 6^x = 6^3 \Rightarrow x = 3$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : ସମାଧାନ କର : $4^x - 3 \times 2^{x+1} + 8 = 0$

ସମାଧାନ : $4^x - 3 \times 2^{x+1} + 8 = 0$

$\Rightarrow (2^2)^x - 3 \times 2^x \times 2 + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 6 \times 2^x + 8 = 0$

ମନେକର $2^x = q$ ହେଲେ ସମୀକରଣଟି $q^2 - 6q + 8 = 0$ ହେବ।

$\Rightarrow q^2 - 4q - 2q + 8 = 0 \Rightarrow q(q-4) - 2(q-4) = 0$

$\Rightarrow (q-4)(q-2) = 0 \Rightarrow q - 4 = 0$ ଅଥବା $q - 2 = 0$

$\Rightarrow q = 4$ ଅଥବା $q = 2 \Rightarrow 2^x = 4$ ଅଥବା $2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^2$ ଅଥବା $2^x = 2^1$

$\Rightarrow x = 2$ ଅଥବା $x = 1$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ ଦ୍ୱୟ 2 ଓ 1 । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(d)

1. ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ ବାଛ ।

   (i) $3x = 4$, (ii) $3^x = 4$, (iii) $\frac{1}{3^x} = 81$, (iv) $\frac{3}{4}x = 1$, (v) $3^{x-2} = 27$, (vi) $2^{2x} - 4 = 0$

2. ସମାଧାନ କର ।

   (i) $4^y = 8$ (ii) $\frac{1}{2^x} = 16$, (iii) $2^x - 8 = 0$, (iv) $3^y = \sqrt[3]{3}$ (v) $\frac{1}{7^{-y}} = 49$ (vi) $6^x = \frac{1}{1296}$

3. ସମାଧାନ କର ।

   (i) $2^{2x} = 16$, (ii) $3^{x+2} = 81$, (iii) $5^y = 5.\sqrt{5}$, (iv) $25^x = 125$, (v) $4^{3x+1} = 64$

4. ସମାଧାନ କର :

   (i) $(\sqrt{3})^{x+5} = (\sqrt[3]{3})^{2x}$, (ii) $3^{y+2} \times 27^{3-y} = 2187$, (iii) $4^{x+1} + 2^{2x} = 40$,

   (iv) $3^{x+5} - 3^{x+3} = \frac{8}{3}$ (v) $4 \times 2^{x-1} = 8^x$, (vi) $3^{x+2} + 3^x = 30$,

   (vii) $3^{x+2} + 3^{x+4} = 810$, (viii) $2^{3-x} \times 4^{2x-1} = 16$ (ix) $2^{x+2} \times 3^{x-1} = 288$,

   (x) $9^x - 4 \times 3^{x+1} + 27 = 0$

ପଞ୍ଚମ ଅଧ୍ୟାୟ

ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି

(COORDINATE GEOMETRY)

5.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଇଂରାଜୀରେ ଜ୍ୟାମିତିକୁ Geometry କୁହାଯାଏ । Geometry ଶବ୍ଦଟି ଦୁଇଟି ଗ୍ରୀକ୍ ଶବ୍ଦ, ଯଥା "geo" ଓ "metrein" ରୁ ସୃଷ୍ଟି । ପ୍ରଥମଟିର ଅର୍ଥ 'ପୃଥିବୀ' ଓ ଦ୍ୱିତୀୟଟିର ଅର୍ଥ 'ପରିମାପ' । ଜ୍ୟାମିତି ଅତ୍ୟନ୍ତ ପୁରାତନ ଶାସ୍ତ୍ର । ଗ୍ରୀସ୍ ଦେଶର ଗଣିତଜ୍ଞ ମାନଙ୍କ ଅବଦାନ ହେତୁ ଜ୍ୟାମିତି ବିଷୟଟି ପରିପୁଷ୍ଟ ହୋଇପାରିଥିଲା । **ଗ୍ରୀକ୍ ଗଣିତଜ୍ଞ Thales** ଜ୍ୟାମିତର ପ୍ରଥମ ଉପପାଦ୍ୟର ପ୍ରମାଣ କରିଥିଲେ; ଯାହାର କଥନଟି 'ଏକ ବୃତ୍ତ ତାର ବ୍ୟାସଦ୍ୱାରା ସମଦ୍ୱିଖଣ୍ଡିତ ହୋଇଥାଏ ।' **ପିଥାଗୋରାସ୍ (Pythagoras)** ଓ ତାଙ୍କ ଗଣିତଜ୍ଞ ବନ୍ଧୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଅନେକ ଜ୍ୟାମିତିକ ଉପପାଦ୍ୟ ଆବିଷ୍କୃତ ହୋଇଥିଲା । ପରେ ଇଜିପ୍ଟର ମହାନ ଗଣିତଜ୍ଞ **ଇୟୁକ୍ଲିଡ୍ (Euclid)** ଜ୍ୟାମିତିର ଉପପାଦ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ଏକତ୍ରିତ କରି ତେରଖଣ୍ଡି ପୁସ୍ତକରେ (Elements) ବିଭକ୍ତ କରି ଜ୍ୟାମିତି ସଂପର୍କିତ ତଥ୍ୟ ରଚନା କରିଥିଲେ । ପ୍ରାୟ 2500 ବର୍ଷ ତଳର ଇୟୁକ୍ଲିଡିୟ ଜ୍ୟାମିତି ଏବେ ମଧ୍ୟ ଗଣିତ ଶିକ୍ଷାରେ ଏକ ପ୍ରଧାନ ଅଙ୍ଗ ଭାବେ ରହିଛି । ଇଉକ୍ଲିଡ଼ିୟ ଜ୍ୟାମିତି ଓ ବୀଜଗଣିତ ସଂପୂର୍ଣ୍ଣ ପୃଥକ ବିଷୟ; ମାତ୍ର ସପ୍ତଦଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଫରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ **Rene Descartes (1596 – 1650)** ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରଦତ୍ତ ନୂତନ ଧାରଣାକୁ ଆଧାର କରି **ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି (Coordinate Geometry)** ବା **ବିଶ୍ଳେଷଣାତ୍ମକ ଜ୍ୟାମିତି (Analytical Geometry)** ଜନ୍ମଲାଭ କଲା ଓ ଏଥିରେ ଜ୍ୟାମିତିକ ଚର୍ଚ୍ଚାରେ ବୀଜଗଣିତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ଭୂମିକା ଲାଭ କଲା । ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି ଉପରେ Rene Descartes ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରସ୍ତୁତ ପ୍ରଥମ ପୁସ୍ତକ 1637 ରେ ପ୍ରକାଶ ଲାଭ କରିଥିଲା ।

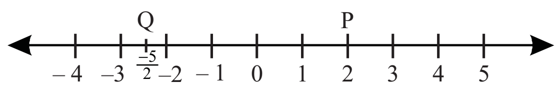
ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ମୂଖ୍ୟ ସୋପାନ ହେଲା, ସମତଳରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁକୁ ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାର **କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି (Ordered Pair)** ରୂପେ ଓ ଶୂନ୍ୟରେ ଥିବା ବିନ୍ଦୁକୁ ତିନିଗୋଟି ସଂଖ୍ୟାର **କ୍ରମିତ ତ୍ରୟୀ (Ordered triad)** ରୂପେ ସୂଚିତ କରିବା । ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟ ବା ଧାରଣା ଅତ୍ୟନ୍ତ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ସ୍ଥାନ ଅଧିକାର କରିଥାଏ । ଅଧିକାଂଶ ଉପପାଦ୍ୟ ଯାହା ଇଉକ୍ଲିଡ଼ିୟ ପଦ୍ଧତିରେ ତର୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରମାଣିତ ହୋଇଥାଏ, ସେଗୁଡ଼ିକ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିର ପ୍ରୟୋଗରେ ସହଜରେ ପ୍ରମାଣ କରାଯାଇପାରିବ । ଏତଦ୍ ବ୍ୟତୀତ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିକୁ **Newton ଓ Leibnitz** ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆବିଷ୍କୃତ **କଳନ ଶାସ୍ତ୍ର (Calculus)** ର ଭିତ୍ତିଭୂମି ରୂପେ ମଧ୍ୟ ବିଚାର କରାଯାଇଥାଏ ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟରେ ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଆଲୋଚନା ବେଳେ କିପରି ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁକୁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସାହାଯ୍ୟରେ ଚିହ୍ନଟ କରାଯାଏ ତାହା ଆଲୋଚିତ ହୋଇଥିଲା । ସରଳରେଖାର କେବଳ ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଥିବା ହେତୁ ଏହା **ଏକ ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ (One dimensional)** । ସୁତରାଂ ଏହା ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଓ ବିପରୀତ କ୍ରମେ ଯେକୌଣସି ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେଖା ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ସହ ସଂପର୍କିତ କରାଯାଇଥାଏ । ଏଥି ପାଇଁ $\overleftrightarrow{X'X}$ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ ଓ R (ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ସେଟ୍) ସଦୃଶ । ଅର୍ଥାତ୍ $\overleftrightarrow{X'X} \sim R$ । (ଚିତ୍ର 5.2 ଦେଖ)

ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଆମର ଆଲୋଚନାର ବିଷୟ ବସ୍ତୁ ସମତଳ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି (Plane co-ordinate geometry)। ଯେ କୌଣସି ସମତଳ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ଏକ ସେଟ୍; ଏହା ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ । ସମତଳରେ କେବଳ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱାରା ଏହା ଉପରିସ୍ଥ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ଦୁକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ଏଥିପାଇଁ ଅନୁସୃତ ଉପାୟମାନ ନିମ୍ନରେ ଆଲୋଚିତ ହୋଇଛି । ଭଲ ଭାବରେ ଅନୁଧ୍ୟାନ କର ।

5.2 ସମତଳରେ ବିନ୍ଦୁ (Points on a plane) :

ସରଳରେଖା ଏକ ମାତ୍ରା (dimension) ବିଶିଷ୍ଟ । ସୁତରାଂ ଏହା ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଇବା ପାଇଁ କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଯଥେଷ୍ଟ । ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁକୁ ସୂଚାଉଥିବା ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟାଟିକୁ ଉକ୍ତ ବିନ୍ଦୁର **ସ୍ଥାନାଙ୍କ** (Coordinate) କୁହାଯାଏ । ସଂଖ୍ୟାରେଖାର ଏକ ଉଦାହରଣ ନିଆଯାଇପାରେ ।

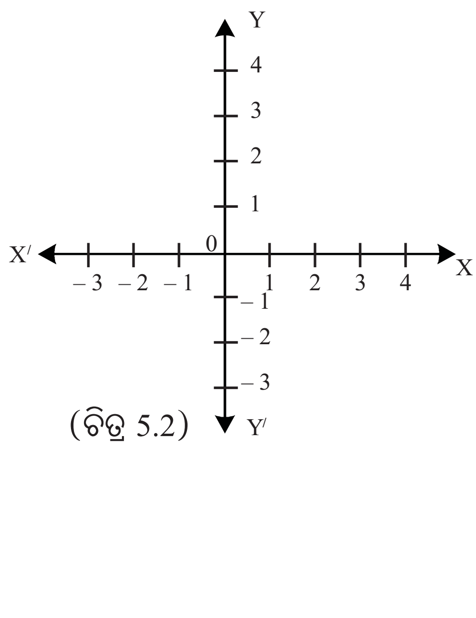


(ଚିତ୍ର 5.1)

ଏଠାରେ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ 2 । ସେହିପରି Q କୁ ସୂଚାଉଥିବା ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ $\frac{-5}{2}$ ।

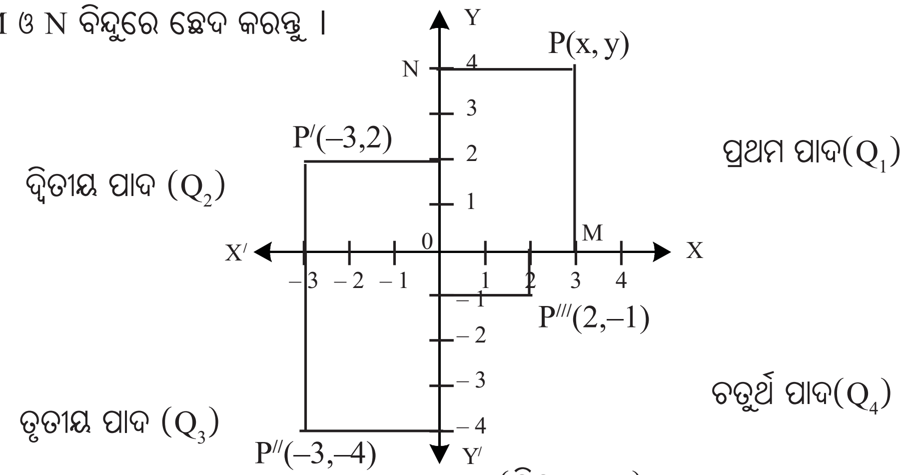
ମାତ୍ର ଲେଖ କାଗଜର ସମତଳ ଉପରେ ଏକ ବିନ୍ଦୁ P କୁ କିପରି ସୂଚାଯାଇ ପାରିବ ? ଲେଖକାଗଜର ସମତଳର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ଉଭୟେ ଥା'ନ୍ତି । ସୁତରାଂ ସମତଳ ଦୁଇ ମାତ୍ରା ବିଶିଷ୍ଟ । ସମତଳ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ବିନ୍ଦୁ P ର ଅବସ୍ଥିତିକୁ ଚିହ୍ନଟ କରିବା ପାଇଁ ପରସ୍ପର ଲମ୍ବ ଭାବେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସଂଖ୍ୟାରେଖା $\overleftrightarrow{X'X}$ ଓ $\overleftrightarrow{Y'Y}$ ନେବା । $\overleftrightarrow{X'X}$ କୁ x- ଅକ୍ଷ ଓ $\overleftrightarrow{Y'Y}$ କୁ y- ଅକ୍ଷ କୁହାଯାଏ ।

ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ O ବିନ୍ଦୁରେ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତୁ । $\overrightarrow{OX}$ ଓ $\overrightarrow{OX'}$ ଯଥାକ୍ରମେ x- ଅକ୍ଷର ଧନଦିଗ ଓ ଋଣ ଦିଗ ଏବଂ $\overrightarrow{OY}$ ଓ $\overrightarrow{OY'}$ ଯଥାକ୍ରମେ y- ଅକ୍ଷର ଧନ ଦିଗ ଓ ଋଣ ଦିଗ ଅଟନ୍ତି । O ବିନ୍ଦୁଟିକୁ ମୂଳବିନ୍ଦୁ (Origin) କୁହାଯାଏ । ସାଧାରଣତଃ x- ଅକ୍ଷ ଆନୁଭୂମିକ (Horizontal) ଓ y- ଅକ୍ଷ ଉଲ୍ଲମ୍ବ (Vertical) ଭାବେ ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ । (x- ଓ y- ଅକ୍ଷକୁ ଆୟତୀୟ ଅକ୍ଷ (Rectangular axes) ଏବଂ ସମତଳସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କକୁ ଆୟତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Rectangular co-ordinate) କୁହଯାଏ; କାରଣ ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ପରସ୍ପରକୁ ସମକୋଣରେ ଛେଦ କରନ୍ତି ।)



(ଚିତ୍ର 5.2)

ମନେକର P ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ । P ବିନ୍ଦୁରୁ x- ଓ y- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ x- ଓ y- ଅକ୍ଷକୁ ଯଥାକ୍ରମେ M ଓ N ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରନ୍ତୁ ।



(ଚିତ୍ର - 5.3)

M ଓ N ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟର x- ଓ y- ଅକ୍ଷ ଉପରେ ସୂଚକ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ହେଲେ ସମତଳରେ P ବିନ୍ଦୁକୁ ଚିହ୍ନଟ କରୁଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟକୁ କ୍ରମିତ ଯୋଡି (x, y) ଭାବେ ଲେଖାଯାଏ । **(x, y) କ୍ରମିତ ଯୋଡିକୁ P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Coordinates) କୁହାଯାଏ । x କୁ x - ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବା ଭୁଜ (abscissa) ଓ y କୁ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବା କୋଟି (ordinate) କୁହାଯାଏ ।** P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) କୁ ମଧ୍ୟ P (x, y) ରୂପେ ଲେଖାଯାଏ । ଚିତ୍ରରେ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (3, 4), $P^{/}$ ବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (-3, 2), $P^{//}$ ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–3, –4) ଓ $P^{///}$ ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (2, -1) ।

x ଓ y - ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଦ୍ୱାରା ସମତଳଟି ଚାରିଗୋଟି **ପାଦ** (Quadrant) ରେ ବିଭାଜିତ ହୁଏ ଏବଂ P ବିନ୍ଦୁ ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ନ ହୋଇ ସମତଳରେ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ ହୁଏ, ତେବେ ଏହା ଏହି ଚାରିଗୋଟି ପାଦରୁ କୌଣସି ଗୋଟିକରେ ରହିବ । ସୃଷ୍ଟି ହେଉଥିବା ପାଦଗୁଡ଼ିକରେ ସ୍ଥାନାଙ୍କ(x, y)ର ରୂପରେଖକୁ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଗଲା ।

ପ୍ରଥମ ପାଦରେ $x > 0, y > 0$, ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦରେ $x < 0, y > 0$,

ତୃତୀୟ ପାଦରେ $x < 0, y < 0$ ଓ ଚତୁର୍ଥ ପାଦରେ $x > 0, y < 0$ ।

ସୂଚନା : ଚାରିଗୋଟି ପାଦକୁ Q_1, Q_2, Q_3 ଓ Q_4 ଭାବେ ଲେଖି ସେଟ୍ ଲିଖନର ସୂତ୍ର ପ୍ରଣାଳୀ ମାଧ୍ୟମରେ ସୂଚାଇଲେ

$Q_1 = \{ (x, y) : x > 0, y > 0 \}$, $Q_2 = \{ (x, y) : x < 0, y > 0 \}$

$Q_3 = \{ (x, y) : x < 0, y < 0 \}$ ଓ $Q_4 = \{ (x, y) : x > 0, y < 0 \}$

5.2.1 ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (Co-ordinate of points on axes) :

(i) x- ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ ଏବଂ $x \in R$ । ଏପରି ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ x – ଅକ୍ଷ ଅଟେ । $\therefore$ x ଅକ୍ଷ = $\{ (x, y) \mid x \in R, y = 0 \}$ ଅଥବା x - ଅକ୍ଷ = $\{(x, 0) : x \in R \}$

(ii) y- ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ଯେକୌଣସି ବିନ୍ଦୁର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଶୂନ ଏବଂ $y \in R$ । ଏପରି ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସେଟ୍ y – ଅକ୍ଷ ଅଟେ । $\therefore$ y ଅକ୍ଷ = $\{ (x, y) \mid x = 0, y \in R\}$ ଅଥବା y - ଅକ୍ଷ = $\{(0, y) : y \in R \}$

(iii) ମୂଳବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0, 0) । (ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁ)

ମନେରଖ : $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 \cup \{(x, 0) : x \in R\} \cup \{(0, y) : y \in R\} = R^2$ ଅଥବା R x R

5.2.2 xy - ସମତଳ (xy - plane) :

ଯେଉଁ ସମତଳଟିରେ x- ଓ y- ଅକ୍ଷ ଅଙ୍କନ କରି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ (x ଓ y) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ କରାଯାଏ, ସେହି ସମତଳକୁ xy- ସମତଳ କୁହାଯାଏ । xy- ସମତଳର ସମସ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ସେଟ୍‌ଟି $R \times R = R^2 = \{(x,y) | x, y \in R\}$ ।

ଯେଉଁଠାରେ R x R କାର୍ଟେଜୀୟ ଗୁଣନ ସେଟ୍ । xy- ସମତଳଟିକୁ ମଧ୍ୟ **କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳ (Cartesian Plane)** ବା R^2 – ସମତଳ କୁହାଯାଏ ।

x- ଅକ୍ଷ ଓ y - ଅକ୍ଷ ପରସ୍ପର ପ୍ରତି ଲମ୍ବ ନିଆଯାଇଥିବା ହେତୁ ସମତଳ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) କୁ ମଧ୍ୟ **ଆୟତୀୟ ସ୍ଥାନାଙ୍କ (rectangular coordinates)** କୁହାଯାଏ ।

5.2.3 ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ (Half Plane) :

x- ଅକ୍ଷ ଦ୍ୱାରା xy- ସମତଳଟି ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ ଯଥା : ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $\{(x, y) : y > 0, x \in R\}$ ଅଥବା $Q_1 \cup Q_2$ ଓ ଅଧଃ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $\{(x, y) : y < 0, x \in R\}$ $Q_3 \cup Q_4$ ରେ ବିଭାଜିତ ହୁଏ । ସେହିପରି y- ଅକ୍ଷ, xy ସମତଳକୁ ଦୁଇଟି ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ ଯଥା : ଦକ୍ଷିଣ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $\{(x, y) : x > 0, y \in R\}$ ଅଥବା $Q_1 \cup Q_4$ ଓ ବାମ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $\{(x, y) : x < 0, y \in R\}$ ଅଥବା $Q_2 \cup Q_3$ ରେ ବିଭାଜିତ କରିଥାଏ ।

ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର :

(i) ବିନ୍ଦୁ P(2,3), Q_1 ରେ ଅବସ୍ଥିତ ($P \in Q_1$) (ii) ବିନ୍ଦୁ Q(–2,3), Q_2 ରେ ଅବସ୍ଥିତ ($Q \in Q_2$)

(iii) ବିନ୍ଦୁ R(–2,–3), Q_3 ରେ ଅବସ୍ଥିତ ($R \in Q_3$) (iv) ବିନ୍ଦୁ S(2,–3), Q_4 ରେ ଅବସ୍ଥିତ ($S \in Q_4$)

(v) ବିନ୍ଦୁ M(2,0); x ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ (vi) ବିନ୍ଦୁ N(0,3), y - ଅକ୍ଷ ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (a)

1. ଭୁଲ୍ ଥିଲେ ଠିକ୍ କର ।

(i) ମୂଳ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0, 0) (ii) ପ୍ରଥମ ପାଦ(Q_1) ଉପରିସ୍ଥ(x,y)ରେ $x > 0, y < 0$

(iii) ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦ(Q_2) ଉପରିସ୍ଥ (x,y) ରେ $x<0, y<0$ (iv) ତୃତୀୟ ପାଦ (Q_3) ଉପରିସ୍ଥ(x,y)ରେ $x<0, y<0$

(v) ଚତୁର୍ଥ ପାଦ (Q_4) ଉପରିସ୍ଥ (x,y)ରେ $x> 0, y>0$ (vi) x- ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0, y)

(vii) y- ଅକ୍ଷ ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, 0) (viii) $Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 \cup Q_4 = R^2$

(ix) R^2 ର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $Q_1 \cup Q_2$ (x) R^2 ର ଦକ୍ଷିଣ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳ = $Q_1 \cup Q_2$

(xi) (-3, -2) ବିନ୍ଦୁଟି ତୃତୀୟ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ । (xii) (1.2, -1) ବିନ୍ଦୁଟି ଦ୍ୱିତୀୟ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(xiii) $(-0.5, \sqrt{2})$ ବିନ୍ଦୁଟି ପ୍ରଥମ ପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ । (xiv) (x, y) = (-2, 3) ହେଲେ, x = –2 ଓ y = 3

2. ସମତଳରେ x- ଓ y- ଅକ୍ଷ ଅଙ୍କନ କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଲେଖ କାଗଜ ଉପରେ ଦତ୍ତ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ସାହାଯ୍ୟରେ ଚିହ୍ନଟ କର । (ଲେଖ କାଗଜରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଅକ୍ଷରେ 1 ସେ.ମି ଦୈର୍ଘ୍ୟକୁ 1 ଏକକ ନିଅ ।)

(i) $P_1(2, 2)$ (ii) $P_2(-3, 2)$ (iii) $P_3(2, -3)$ (iv) $P_4(-4, -4)$

(v) $P_5(-3, 4)$ (vi) $P_6(0, 3)$ (vii) $P_7(3, 0)$ (viii) $P_8(0, -4)$

3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ସଂଖ୍ୟାରେଖା $\overleftrightarrow{X'X}$ ର ମାତ୍ରା କେତେ ?

(ii) xy - ସମତଳର ମାତ୍ରା କେତେ ?

(iii) ସମତଳ ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତି କେଉଁ ଗଣିତଜ୍ଞଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଆବିଷ୍କୃତ ହୋଇଥିଲା ?

(iv) xy - ସମତଳ କୁ x - ଅକ୍ଷ ଓ y - ଅକ୍ଷ କେତେଗୋଟି ପାଦରେ ବିଭକ୍ତ କରନ୍ତି ?

(v) $\overleftrightarrow{X'X}$ ଅକ୍ଷ ର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ କେଉଁଟି ?

(vi) $\overleftrightarrow{Y'Y}$ ଅକ୍ଷ ର ଋଣାତ୍ମକ ଦିଗ କେଉଁଟି ?

(vii) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଜ୍ୟାମିତିରେ ଜ୍ୟାମିତିକ ଚର୍ଚ୍ଚା ପାଇଁ ଗଣିତର କେଉଁ ଶାଖାଟିର ପ୍ରୟୋଗ କରାଯାଇ ଥାଏ ?

(viii) P(5,4) ବିନ୍ଦୁର x - ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଓ y - ସ୍ଥାନାଙ୍କ କେତେ ?

4. A(0, y), B(7,0), C(–2,5), D(3,–4) ଏବଂ E(–1, 1) ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ବିନ୍ଦୁ ବା ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକ କେଉଁ ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅଥବା କେଉଁ କେଉଁ ଅକ୍ଷରେ ଅବସ୍ଥିତ ଲେଖ ।

5. ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) $x > 0,\ y > 0$ ହେଲେ, $p(x, -y)$ .... ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(ii) $x < 0,\ y < 0$ ହେଲେ, $p(x, -y)$ .... ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(iii) $x > 0,\ y < 0$ ହେଲେ, $p(-x, y)$ .... ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(iv) $x \in R,\ y < 0$ ହେଲେ, $p(x, y)$ .... ଅର୍ଦ୍ଧତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(v) $x < 0,\ y \in R$ ହେଲେ, $p(x, y)$ .... ଅର୍ଦ୍ଧତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(vi) $x > 0,\ y > 0$ ହେଲେ, $p(-x, -y)$ .... ବୃତ୍ତପାଦରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

5.3 ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ (Equation of a line) :

ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଫଳନର ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଫଳନର ଅନେକଗୁଡ଼ିଏ ଧର୍ମ ଜାଣିହୁଏ । ସହ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ସମାଧାନ କରାଯାଇପାରେ । ଏସବୁ ବିଷୟ ପରବର୍ତ୍ତୀ ଶ୍ରେଣୀରେ ପଢ଼ିବ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଆମେ ଦେଖିବା ଦୁଇଟି ଚଳରାଶି x ଓ y ରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର xy - ସମତଳରେ କିପରି ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରିବ ?

x ଓ y ରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ (ଯାହାକୁ ମଧ୍ୟ ସରଳ (Linear) ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ) ର ବ୍ୟାପକ ରୂପ (general form) $ax + by + c = 0$ .... (1)

ଏଠାରେ a ଓ b ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ର ସହଗ (coefficient) ଓ c ଧ୍ରୁବକ ରାଶି (constant) ଅଟନ୍ତି । ଏଗୁଡିକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା; କିନ୍ତୁ a ଓ b ଏକ ସଙ୍ଗେ ଶୂନ ନୁହଁନ୍ତି । ଚଳରାଶି x ଓ y ରୁ ଗୋଟିଏ ସ୍ୱାଧୀନ ଓ ଅନ୍ୟଟି ସ୍ୱାଧୀନ ଚଳ ଉପରେ ନିର୍ଭରଶୀଳ । ସାଧାରଣତଃ ଆମ ଆଲୋଚନାରେ ଚଳରାଶି x କୁ ସ୍ୱାଧୀନ ଚଳ ରୂପେ ବିଚାର କରାଯିବ ଓ ଅନ୍ୟ ଚଳରାଶି y (ସାପେକ୍ଷ ଚଳ)ର ମୂଲ୍ୟ (1) ସମୀକରଣରୁ ଲବ୍ଧ ହେବ । କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳରେ ଏପରି ଭାବେ ଲବ୍ଧବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କୁ ସ୍ଥାପନ କଲେ ଆମକୁ ଯେଉଁ ଲେଖଚିତ୍ର (graph) ମିଳିବ ତାହାକୁ ସମୀକରଣ (1) ର ଲେଖଚିତ୍ର କୁହାଯାଏ । ସମୀକରଣ (1) x ଓ y ରେ ଗୋଟିଏ ଏକ ଘାତୀ ସମୀକରଣ ହୋଇଥିବାରୁ ଏହାର ଲେଖଚିତ୍ରଟି କାର୍ଟେଜୀୟ ସମତଳରେ ଏକ ସରଳରେଖା (L) ହେବ । ବସ୍ତୁତଃ ବୀଜଗାଣିତିକ ସମୀକରଣ (1) ଓ ଏହାର ଲେଖଚିତ୍ର L (ଯାହାକି ଏକ ସରଳରେଖା) ଏକ ଓ ଅଭିନ୍ନ । ଅନ୍ୟ ଭାଷାରେ କହିଲେ ସରଳରେଖା L, ସମୀକରଣ (1) ର ଏକ ଜ୍ୟାମିତିକ ରୂପର ପରିପ୍ରକାଶ ।

ସମୀକରଣ (1) ରେ ଥିବା ସହଗ ଓ ଧ୍ରୁବକ ରାଶି a, b ଓ c ର ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ନେଇ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କଲେ ଆମକୁ xy- ସମତଳରେ ବିଭିନ୍ନ ସରଳରେଖା ମିଳିବ । ଏହି ସରଳରେଖାମାନଙ୍କ ବର୍ଗୀକରଣ ନିମ୍ନଲିଖିତ ତିନିଗୋଟି ଶ୍ରେଣୀରେ କରାଯାଇ ପାରିବ ।

(i) $a = 0$ ଓ $b \neq 0$ ହେଲେ (1) ସମୀକରଣର ରୂପ $y = k_1$ ଯେଉଁଠାରେ $k_1 = (-\frac{c}{b})$

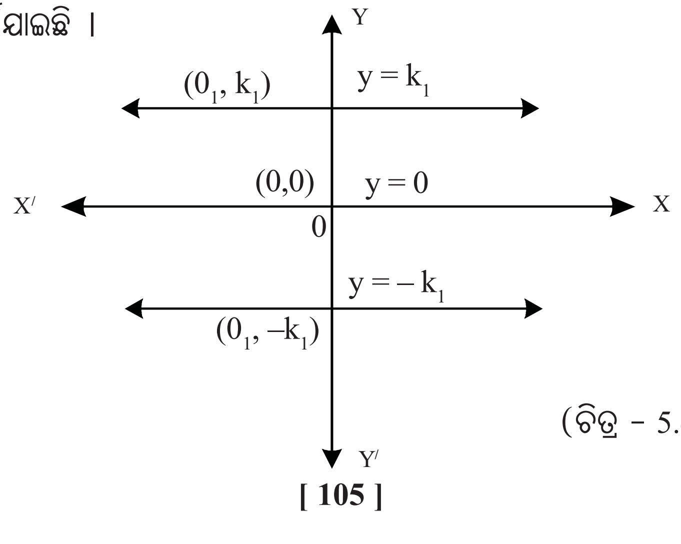
(ii) $b = 0$ ଓ $a \neq 0$ ହେଲେ (1) ସମୀକରଣର ରୂପ $x = k_2$ ଯେଉଁଠାରେ $k_2 = (-\frac{c}{a})$

(iii) $a \neq 0$ ଓ $b \neq 0$ ହେଲେ (1) ସମୀକରଣର ରୂପ $y = mx + c$ ଯେଉଁଠାରେ $m = (-\frac{a}{b})$

କାରଣ $ax + by + c = 0 \Rightarrow y = (-\frac{a}{b})x + (-\frac{c}{b})$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସମୀକରଣ (1) ରେ ଥିବା ସହଗ ଓ ଧ୍ରୁବକ ରାଶିର ମୂଲ୍ୟ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ନିଆଯାଇ ଉପରେ ଆଲୋଚିତ ପରିସ୍ଥିତିଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ସରଳରେଖା L ଟି କିପରି ଭାବେ xy- ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ତାହା ଆଲୋଚନା କରିବା ।

ପରିସ୍ଥିତି (i) : $y = k_1$ ସମୀକରଣ xy- ସମତଳରେ ଏକ ସରଳରେଖାକୁ ସୂଚାଏ; ଯାହା x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର । $y = k_1$ ସରଳରେଖାଟି ମୂଳବିନ୍ଦୁଠାରୁ k_1 ଏକକ ଦୂରରେ x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ xy- ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି $k_1 = 0$ ତେବେ ସମୀକରଣଟି x- ଅକ୍ଷ ଅଟେ । $k_1 > 0$ ହେଲେ ସରଳରେଖାଟି x- ଅକ୍ଷର (ଉପରପାର୍ଶ୍ୱକୁ) ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱ-ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳରେ ଓ $k_1 < 0$ ହେଲେ $y = k_1$ ସରଳରେଖାଟି x- ଅକ୍ଷର (ତଳକୁ) ଅଧଃ-ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ । ଲେଖଚିତ୍ରକୁ ନିମ୍ନରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।

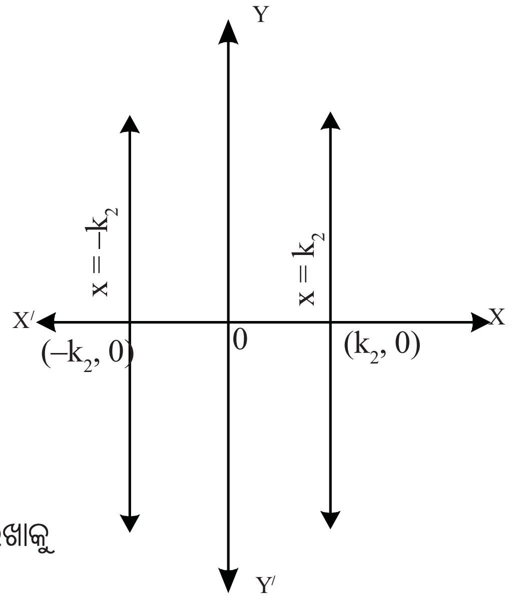


(ଚିତ୍ର - 5.4)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (a) $y = k_1, (k_1 > 0, k_1 < 0$ ଓ $k_1 = 0)$ ଏ ସମସ୍ତ ସରଳରେଖାକୁ ଆନୁଭୂମିକ ସରଳରେଖା (Horizontal lines) କୁହାଯାଏ ।

(b) $y = 0$ ସମୀକରଣଟି x- ଅକ୍ଷକୁ ସୂଚାଏ ।

ପରିସ୍ଥିତି (ii): $x = k_2$ ସମୀକରଣ xy- ସମତଳରେ ଏକ ସରଳରେଖାକୁ ସୂଚାଏ ଓ ଏହା y-ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର । ଏହି ସରଳରେଖାଟି $(k_2,y), (y \in R)$ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଗଠିତ । $x = k_2$ ସରଳରେଖାଟି ମୂଳବିନ୍ଦୁଠାରୁ k_2 ଦୂରରେ y- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ଭାବେ xy- ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ । ଯଦି $k_2 = 0$ ତେବେ ସମୀକରଣଟି y- ଅକ୍ଷ ଅଟେ । $k_2 > 0$ ହେଲେ $x = k_2$ ସରଳରେଖାଟି y- ଅକ୍ଷର ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ବା ଦକ୍ଷିଣ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳରେ ଓ $k_2 < 0$ ହେଲେ $x = k_2$ ସରଳରେଖାଟି y ଅକ୍ଷର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ ବା ବାମ ଅର୍ଦ୍ଧ ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବେ । ଏହା ପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ଚିତ୍ରରେ ଦର୍ଶାଯାଇଛି ।



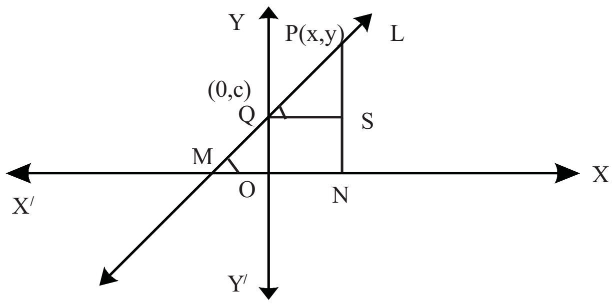
(ଚିତ୍ର - 5.5)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ (c) **:** $x = k_2, (k_2 > 0, k_2 < 0$ ଓ $k_2 = 0)$ ଏ ସମସ୍ତ ସରଳରେଖାକୁ ଉଲ୍ଲମ୍ବ ସରଳରେଖା (Vertical lines) କୁହାଯାଏ ।

(d) $x = 0$ ସମୀକରଣଟି y- ଅକ୍ଷକୁ ସୂଚାଏ ।

ପରିସ୍ଥିତି (iii) : ପ୍ରଥମେ ଆଲୋଚିତ ଦୁଇଟି ପରିସ୍ଥିତି (i) ଓ (ii) ରେ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟର ଲେଖଚିତ୍ର ଯଥାକ୍ରମେ ଆନୁଭୂମିକ ଓ ଉଲ୍ଲମ୍ବ ସରଳରେଖା । ବର୍ତ୍ତମାନ ପରିସ୍ଥିତି (iii) ରେ xy ସମତଳରେ ସମୀକରଣ (1) ର ଲେଖଚିତ୍ର ଗୋଟିଏ ତୀର୍ଯ୍ୟକ ସରଳରେଖା ଓ ଏହା ଚିତ୍ର 5.6 ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ । ପ୍ରକାଶ ଥାଉକି ସମୀକରଣ (1) ର ଅନ୍ୟ ଏକ ରୂପ $y = mx + c$ .... (2)

ପ୍ରମାଣ : L ରେଖା y – ଅକ୍ଷକୁ Q ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ ଏବଂ x – ଅକ୍ଷର ଧନାତ୍ମକ ଦିଗ ସହ θ^0 ପରିମାଣର କୋଣ ଉତ୍ପନ୍ନ କରୁ ।



(ଚିତ୍ର - 5.6)

ଏଠାରେ P (x , y), L ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ଏକ ବିନ୍ଦୁ । ସରଳରେଖାଟି x- ଅକ୍ଷକୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । P ବିନ୍ଦୁରୁ x ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ଅଙ୍କିତ ଲମ୍ବ $\overline{PN}$ ଓ $\overline{QS} \perp \overline{PN}$ ହେଉ । $OQ = c$ ହେଲେ Q ବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (0,c) ହେବ ।

L ସରଳରେଖା ଘଣ୍ଟା କଣ୍ଟାର ଘୂର୍ଣ୍ଣର ବିପରୀତ ଦିଗରେ x- ଅକ୍ଷର ଧନ ଦିଗ ସହ ସୃଷ୍ଟି କରୁଥିବା କୋଣର ପରିମାଣ θ କୁ L ସରଳରେଖାର ଆନତି (angle of inclination) କୁହାଯାଏ । ଏଠାରେ L ରେଖାଟି ତୀର୍ଯ୍ୟକ୍ ହେତୁ $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ।

P ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (x, y) ହେଲେ ON = x ଓ NP = y । PSQ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜରେ ରେ $m\angle PQS = \theta$ ($\because m\angle PMN = \theta$) ଏବଂ PS = PN – NS = PN – OQ = y – c ଓ QS = ON = x ।

$$PSQ\ \Delta \text{ ରେ } \quad \tan\theta = \frac{PS}{QS} = \frac{y-c}{x}$$

$$\Rightarrow x\tan\theta = y - c$$

$$\Rightarrow y = (\tan\theta)x + c \Rightarrow y = mx + c \text{ (ଯେଉଁଠାରେ } m = \tan\theta)$$

$$\Rightarrow y = mx + c \qquad \text{.......} (2)$$

ସୁତରାଂ L ଉପରିସ୍ଥ ଯେ କୌଣସି ବିନ୍ଦୁ P(x,y) ନେଲେ x ଓ y ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ (2) ସିଦ୍ଧ ହେବ । ଏଠାରେ ସରଳରେଖା L ର ସ୍ଲୋପ୍ (Slope) ଓ y ଛେଦାଂଶ (y- intercept) ଯଥାକ୍ରମେ m ଓ c ।

ମୂଳବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣ : ସରଳରେଖା L ମୂଳବିନ୍ଦୁ O(0, 0) ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ହୋଇଥିଲେ ଏହାର ସମୀକରଣ (2), x = 0 ଓ y = 0 ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେବ । ଅତଏବ $y = mx + c \Rightarrow 0 = m \times 0 + c \Rightarrow c = 0$

ସୁତରାଂ ମୂଳବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖା (y- ଅକ୍ଷକୁ ଛାଡି) ର ସମୀକରଣ y = mx ହେବ ।

ମନେରଖ : ଉଲ୍ଲମ୍ବ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ ନିରର୍ଥକ କାରଣ $\theta = 90^0$ ହେଲେ ସ୍ଲୋପ୍ $\tan\theta$ ନିରର୍ଥକ ହେବ । L ସରଳରେଖାଟି ଆନୁଭୂମିକ ହୋଇଥିଲେ ଏହାର ଆନତି $\theta = 0^0$ ଅର୍ଥାତ୍ ସ୍ଲୋପ୍ $\tan\theta = 0$ ହେବ ।

ସରଳରେଖା L ର ସ୍ଲୋପ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ :

ସମୀକରଣ(2) ଦ୍ୱାରା ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା L ଉପରେ $P_1(x_1, y_1)$ ଓ $P_2(x_2, y_2)$ ଦୁଇ ଗୋଟି ବିନ୍ଦୁ ହେଲେ $\overleftrightarrow{P_1P_2} = L$ । ଏଠାରେ y = mx + c ସମୀକରଣଟି (x_1, y_1) ଓ (x_2, y_2) କ୍ରମିତଯୋଡ଼ି ଦ୍ୱାରା ସିଦ୍ଧ ହେବ ।

$\therefore y_1 = mx_1 + c$ .... (i) ଏବଂ $y_2 = mx_2 + c$ .... (ii)

(i) ଓ (ii) ରୁ c କୁ ଅପସାରଣ କଲେ ପାଇବା : $m(x_1 - x_2) = y_1 - y_2$

$\Rightarrow m = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ ଅଥବା $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ଅର୍ଥାତ୍ L ରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ = $\dfrac{\text{y- ସ୍ଥାନାଙ୍କଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର}}{\text{x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଦ୍ୱୟର ଅନ୍ତର}}$

ଉଦାହରଣ - 1 : $3x - 2y + 6 = 0$ ସମୀକରଣଟିକୁ y = mx + c ରୂପରେ ପରିବର୍ତ୍ତନ କରି ସ୍ଲୋପ୍ m ଓ y- ଛେଦାଂଶ c ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $3x - 2y + 6 = 0 \Rightarrow 2y = 3x + 6 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x + 3$ ଓ ଏହା ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର y = mx + c ରୂପ । ଏଠାରେ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ (m) = $\frac{3}{2}$, y- ଛେଦାଂଶ (c) = 3 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 : (i) P_1 (3,0), (ii) P_2(2, 1), (iii) P_3(0,4) ବିନ୍ଦୁ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ ଗୁଡିକ $4x+3y - 12 = 0$ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : (i) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣରେ x = 3, y = 0 ଲେଖିଲେ $4 \times (3) + 3 \times 0 - 12 = 0$ ଅଟେ ।

ଅତଏବ x = 3, y = 0 ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେଉଥିବାରୁ P_1 (3,0) ବିନ୍ଦୁଟି $4x + 3y - 12 = 0$ ସରଳରେଖା ଉପରେ ଅବସ୍ଥିତ ।

(ii) ଦତ୍ତ ସମୀକରଣରେ $x = 2, y = 1$ ଲେଖିଲେ $4 \times 2 + 3 \times 1 - 12 = -1 \neq 0$;

ସୁତରାଂ $P_2(2, 1)$ ବିନ୍ଦୁଟି ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ନୁହେଁ ।

(iii) ପୁନଶ୍ଚ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣରେ $x = 0, y = 4$ ଲେଖିଲେ $4 \times 0 + 3 \times 4 - 12 = 0$

ଅତଏବ $P_3(0,4)$ ବିନ୍ଦୁଟି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣକୁ ସିଦ୍ଧ କରୁଅଛି । ସୁତରାଂ $P_3(0,4)$ ବିନ୍ଦୁଟି ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ।

$\therefore P_1(3,0)$ ଓ $P_3(0,4)$ ବିନ୍ଦୁ ଦ୍ୱୟ ଦତ୍ତ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଅଟନ୍ତି ।

ଉଦାହରଣ - 3 : $P_1(7,8)$ ଓ $P_2(-3,2)$ ବିନ୍ଦୁଦ୍ୱୟଗାମୀ ସରଳରେଖାର ସ୍ଲୋପ୍ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $x_1 = 7, y_1 = 8$ ଏବଂ $x_2 = -3, y_2 = 2$ ।

ଅତଏବ $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ ର ସ୍ଲୋପ୍ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-8}{-3-7} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

   (i) x ଓ y ରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ରୂପଟିକୁ ଲେଖ ।

   (ii) x ଓ y ରେ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ରଟିର ସ୍ୱରୂପ କ'ଣ ହେବ ?

   (iii) x - ଅକ୍ଷର ସମୀକରଣଟି ଲେଖ ।

   (iv) y - ଅକ୍ଷର ସମୀକରଣଟି ଲେଖ।

   (v) (3, 0) ବିନ୍ଦୁ ଦେଇ y- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣଟିକୁ ଲେଖ ।

   (vi) (0, –2) ବିନ୍ଦୁଦେଇ x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣଟିକୁ ଲେଖ ।

   (vii) ମୂଳବିନ୍ଦୁଗାମୀ ସରଳରେଖାର ସମୀକରଣଟିର ବ୍ୟାପକ ରୂପକୁ ଲେଖ ।

   (viii) (2, 3) ବିନ୍ଦୁ, $2x + 3y + 6 = 0$ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ହେବ କି ?

   (ix) (1, –1) ବିନ୍ଦୁ, $3x + 4y + 1 = 0$ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ହେବ କି ?

   (x) $x = 0$ ଓ $y = 0$ ସରଳରେଖା ଦ୍ୱୟର ଛେଦ ବିନ୍ଦୁଟିର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଲେଖ ।

2. ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ସରଳରେଖାମାନଙ୍କୁ $y = mx + c$ ରୂପରେ ଲେଖି m ଓ c ନିରୂପଣ କର ।

   (i) $2x + 4y - 7 = 0$ (ii) $x - 2y + 5 = 0$ (iii) $3x - 4y = 0$

3. $x - 2y + 5 = 0$ ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ ଦତ୍ତ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କରୁ ଚିହ୍ନଟ କର ।

   (i) (1, 3), (ii) (2, 4), (iii) (2,5), (iv) –1, 2), (v) (7, –6), (vi) (–3, 1)

4. ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ P_1 ଓ P_2 ଦେଇ ଅଙ୍କିତ ସରଳରେଖା $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ ର ସ୍ଲୋପ୍ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   (i) $P_1(1, 2)$ ଓ $P_2(2, 3)$ (ii) $P_1(-1, 2)$ ଓ $P_2(5, 7)$

   (iii) $P_1(-2, -3)$ ଓ $P_2(-4, -5)$ (iv) $P_1(2, -4)$ ଓ $P_2(0, 6)$

   (v) $P_1(0, 0)$ ଓ $P_2(1, 1)$ (vi) $P_1(0, 0)$ ଓ $P_2(-1, 1)$

5.4 ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର (Graph of the Linear equation in two variables) :

$ax+by+c=0$ ଓ $y=mx+c$ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକର ଲେଖଚିତ୍ର ସମତଳରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା । ଲେଖକାଗଜରେ x - ଓ y - ଆୟତୀୟ ଅକ୍ଷ ଅଙ୍କନ କରି ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ସହାୟତାରେ ଚାରି କିମ୍ବା ପାଞ୍ଚଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି) ନିରୂପଣ କରାଯାଏ ଓ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ଲେଖ କାଗଜରେ ବିନ୍ଦୁମାନ ସ୍ଥାପନ କରାଯାଏ । ଏହି ବିନ୍ଦୁଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍କେଲ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ ଯୋଗ କଲେ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟିର ଲେଖଚିତ୍ର ଏକ ସରଳରେଖା ହୁଏ । ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣ ଗୁଡ଼ିକରେ ବିଶଦ୍ ଭାବେ ବୁଝାଇ ଦିଆଯାଇଛି । ଏଠାରେ ମନେରଖିବା ଉଚିତ ହେବ ଯେ, ଏକ ଦୁଇ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଘାତୀ ସମୀକରଣର ଅସଂଖ୍ୟ ସମାଧାନ ଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 4 : $x=2$ ଓ $y=3$ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ଏ ଦୁଇଟି ଲେଖଚିତ୍ର ପରସ୍ପରକୁ ଯେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରିବେ ତାହାର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର।

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟ $x=2$ .... (i) ଓ $y=3$ .... (ii)

ଦୁଇଟି ଯାକ ସମୀକରଣ ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଟେବୁଲ ଗଠନ କରି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନ ସ୍ଥିର କରିବା ପ୍ରଥମ ସୋପାନ ଅଟେ ।

ଟେବୁଲ - 1 (ସମୀକରଣ (i) ପାଇଁ)

x	2	2	2	2
y	–1	0	1	2

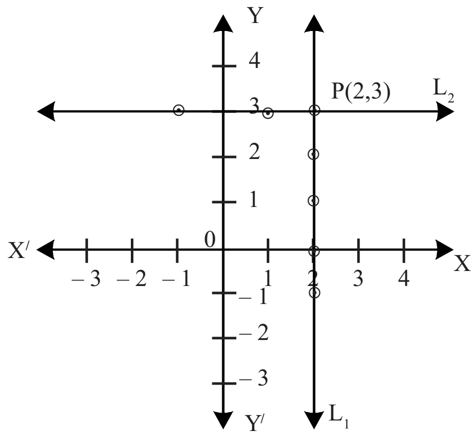
ଟେବୁଲ -2 (ସମୀକରଣ (ii) ପାଇଁ)

x	–1	0	1	2
y	3	3	3	3

ସୂଚନା : (i) $x=2$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖାଟି ମୂଳବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଡାହାଣକୁ 2 ଏକକ ଦୂରରେ y - ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହୋଇ xy- ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ।

(ii) $y=3$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ସରଳରେଖାଟି ମୂଳବିନ୍ଦୁଠାରୁ ଉପରକୁ 3 ଏକକ ଦୂରରେ x- ଅକ୍ଷ ସହ ସମାନ୍ତର ହୋଇ xy - ସମତଳରେ ଅବସ୍ଥିତ ହେବ ।

ଦ୍ୱିତୀୟ ସୋପାନଟି ହେଲା ଲେଖ କାଗଜରେ ଉପଯୁକ୍ତ ଭାବେ ଏକକ (1 ସେ.ମି. = 1 ଏକକ) ନେଇ ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରିବା ଓ ଟେବୁଲରେ (x,y) କ୍ରମିତ ଯୋଡିଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ବିନ୍ଦୁ ସ୍ଥାପନ କରିବା ।



$L_1 = \{(x, y) \mid x = 2, y \in R\}$

$L_2 = \{(x, y) \mid x \in R, y = 3\}$

$L_1 \cap L_2 = \{P\}$

(ଚିତ୍ର – 5.7)

ତୃତୀୟ ସୋପାନଟି ହେଲା ଏହି ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡିକୁ ସ୍କେଲ ସାହାଯ୍ୟରେ ସଂଯୋଗ କଲେ ଗୋଟିଏ ସରଳରେଖା ପାଇବା।

ସରଳରେଖା L_1 [ସମୀକରଣ (i)] ଓ L_2 [ସମୀକରଣ (ii)] ର ଛେଦବିନ୍ଦୁ P ର ସ୍ଥାନାଙ୍କଟି P(2,3)

ବି.ଦ୍ର. : xy- ସମତଳରେ ଏକ ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ ପାଇଁ ଦୁଇଗୋଟି ବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଯଥେଷ୍ଟ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 5 : $2x - 3y - 6 = 0$ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ $2x - 3y - 6 = 0$ ସମୀକରଣଟିକୁ $y = mx + c$ ରୂପରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ

$y = \frac{2}{3}x - 2$ .... (i) (ଏଠାରେ 'x' କୁ ସ୍ୱାଧୀନ ଚଳ (Independent variable) ଏବଂ y କୁ ସାପେକ୍ଷ ଚଳ (dependent variable) କୁହାଯାଏ ।)

ସମୀକରଣ (i) ରୁ $x = 0 \Rightarrow y = -2$, $x = 3 \Rightarrow y = 0$,

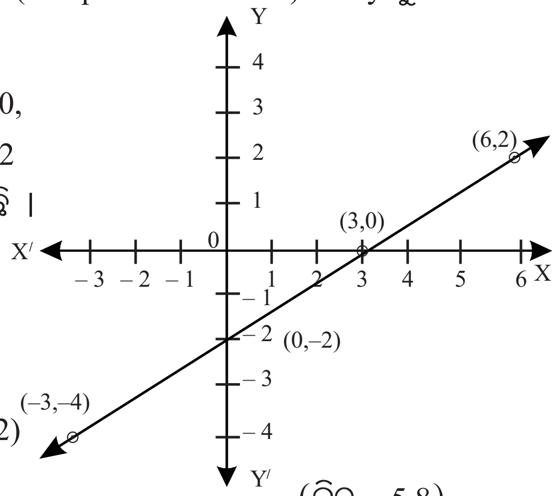
$x = -3 \Rightarrow y = -4$ ଓ $x = 6 \Rightarrow y = 2$

ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ ନେଇ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲଟି ପ୍ରସ୍ତୁତ ହୋଇଛି ।

ଟେବୁଲ 3

x	–3	0	3	6
y	– 4	–2	0	2

∴ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନ : (–3, –4), (0, –2), (3,0) ଏବଂ (6,2)



(ଚିତ୍ର - 5.8)

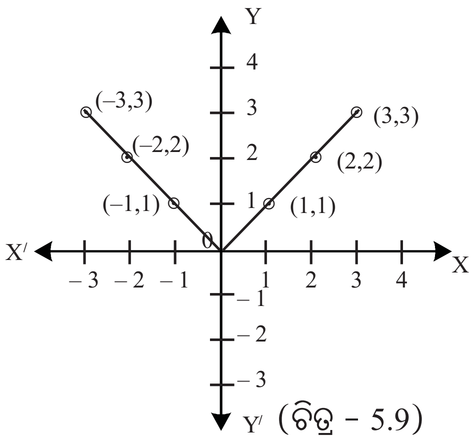
ଉଦାହରଣ- 6 : $y = |x|$ ର ଲେଖଚିତ୍ର $-3 \le x \le 3$ ପାଇଁ ଅଙ୍କନ କର ।

ସମାଧାନ : ଦ୍ୱିତୀୟ ଅଧ୍ୟାୟରେ $|x|$ ର ସଂଜ୍ଞାରୁ ଏହା ଜଣା ଯେ, $|x| = \begin{cases} x, x \ge 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$

ସୁତରାଂ $0 \le x \le 3$ ରେ ସମୀକରଣଟି $y = x$ ଓ $-3 \le x \le 0$ ରେ ସମୀକରଣଟି $y = -x$ । ଅତଏବ ଏଠାରେ $|x|$ ର ଦୁଇଟି ଶାଖା ପାଇଁ ଦୁଇଗୋଟି ଟେବୁଲ କରି କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାକୁ ହେବ ।

x	0	1	2	3
y	0	1	2	3

x	–1	–2	–3
y	1	2	3



(ଚିତ୍ର - 5.9)

ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି (0,0) (1,1) (2,2), (3,3),(–1, 1), (–2, 2) ଓ (–3, 3) ସ୍ଥାନାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ବିନ୍ଦୁ ଗୁଡିକୁ ସ୍ଥାପନ କଲେ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ଲେଖଚିତ୍ରଟି ମିଳିବ ।

ଉଦାହରଣ -7 : $y = 2x$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

ଲେଖଚିତ୍ରରୁ y ର ମାନ –2 ପାଇଁ x ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $y = 2x$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ପାଇଁ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କରିବା ।

ସମୀକରଣରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, $x = 0$ ପାଇଁ $y = 0$, $x = 1$ ପାଇଁ $y = 2$

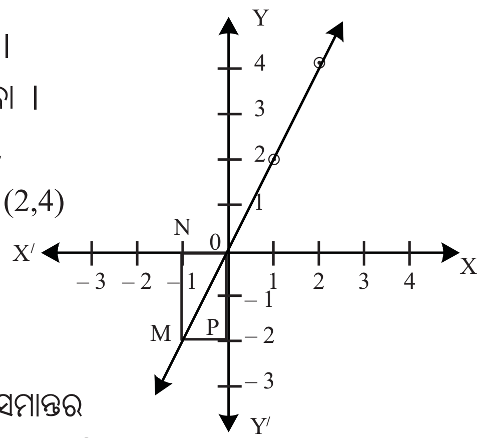
ଏବଂ $x = 2$ ପାଇଁ $y = 4$ $\therefore$ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ିମାନ (0,0),(1,2) ଓ (2,4)

(x- ଅକ୍ଷ ଓ y- ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟ ଅଙ୍କନ କରି ଏହା ଉପରେ 1 ସେ.ମି. = 1 ଏକକ ନେଇ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର)

ଲେଖଚିତ୍ରଟି ଏକ ସରଳରେଖା ହେବ ।

y- ଅକ୍ଷରେ –2 ର ସୂଚକ ବିନ୍ଦୁ P । P ବିନ୍ଦୁରେ x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି ସମାନ୍ତର ରେଖା ଲେଖଚିତ୍ର L କୁ M ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁ । M ବିନ୍ଦୁରୁ x- ଅକ୍ଷ ପ୍ରତି $\overline{MN}$ ଲମ୍ବ ଅଙ୍କନ କର । x- ଅକ୍ଷରେ 'N' ର ସ୍ଥାନାଙ୍କ (–1) ହେବ ।

$\therefore$ y ର ମାନ –2 ପାଇଁ x ର ମାନ –1 ହେବ । (ଉତ୍ତର)



(ଚିତ୍ର - 5.10)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5 (c)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ଲେଖଚିତ୍ର ଗୁଡିକ ଅଙ୍କନ କର ।
   (i) $x = 4$ (ii) $y = 5$ (iii) $x = -5$ (iv) $y = -4$
2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।
   (i) $y = x$ (ii) $y + x = 0$ (iii) $2y = 3x$
3. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୁଡିକର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।
   (i) $x + y - 2 = 0$ (ii) $x + y + 2 = 0$ (iii) $2x + y - 2 = 0$
   (iv) $x + 2y - 3 = 0$ (v) $3x + 2y - 5 = 0$ (vi) $x - y + 2 = 0$
4. ଦତ୍ତ ଟେବୁଲର ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ଏବଂ ଲେଖଚିତ୍ରରୁ a ଓ b ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

x	1	2	5	–1	b
y	3	1	–5	a	–3

5. $2x + 3y - 6 = 0$ ର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଅକ୍ଷଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ଏହା କେଉଁ ବିନ୍ଦୁରେ ଛେଦ କରୁଛି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
6. $y = |x|$ ର ଲେଖଚିତ୍ର $-5 \le x \le 3$ ପାଇଁ ଅଙ୍କନ କର ।
7. $x = \pm 3$, $y = \pm 4$ ଦ୍ୱାରା ସୂଚିତ ଚାରିଗୋଟି ସରଳରେଖା ଅଙ୍କନ କରି ସେମାନଙ୍କ ପାରସ୍ପରିକ ଛେଦ ହେତୁ ଉତ୍ପନ୍ନ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ଶୀର୍ଷ ବିନ୍ଦୁ ମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର ।
8. $5x - 3y = 1$ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ଦର୍ଶାଅ ଯେ, P(2,3) ବିନ୍ଦୁଟି ସରଳରେଖା ଉପରିସ୍ଥ ଏକ ବିନ୍ଦୁ ହେବ ।
9. $x - 3y = 4$ ସମୀକରଣର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର । ଲେଖଚିତ୍ରରୁ ଦତ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ସ୍ଥିର କର, ଯେତେବେଳେ (i) $y = -1$ ଏବଂ (ii) $x = -2$
10. $x = 2y - 1$ ଏବଂ $3y = x$ ସମୀକରଣ ଦ୍ୱୟର ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରି ଲେଖଚିତ୍ର ଦ୍ୱୟର ଛେଦବିନ୍ଦୁର ସ୍ଥାନାଙ୍କ ନିରୂପଣ କର ।

ଅନୁପାତ ଓ ସମାନୁପାତ

(RATIO AND PROPORTION)

6.1. ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ତୁମେମାନେ ଦୈନନ୍ଦିନ ଜୀବନରେ ଅନେକ ବସ୍ତୁ ବା ପଦାର୍ଥର ସଂସ୍ପର୍ଶରେ ଆସୁଛ । ସାଧାରଣତଃ ଏକ ପ୍ରକାରର ଦୁଇଟି ପଦାର୍ଥକୁ ଗୁଣାତ୍ମକ (Quality) କିମ୍ବା ପରିମାଣାତ୍ମକ (Quantity) ଭାବରେ ତୁଳନା କରିଥାଅ । ଏକ ଜାତୀୟ ଦୁଇଟି ପଦାର୍ଥକୁ ପରିମାଣ ଦୃଷ୍ଟିରୁ ସାଧାରଣତଃ କେତେ କମ୍ ବା ବେଶୀ କେତେ ଗୁଣ ବା ଅଂଶ ଦ୍ୱାରା ତୁଳନା କରିଥାଅ । କମ୍ ବା ବେଶୀ କ୍ଷେତ୍ରରେ ବଡ଼ରୁ ସାନ ସଂଖ୍ୟାର ଫେଡ଼ାଣ ଦ୍ୱାରା ତୁଳନା କରିବା ବେଳେ ଗୁଣ ବା ଅଂଶ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅନୁପାତର ପ୍ରୟୋଗ କରି ତୁଳନା କରିଥାଅ । ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ତୁମେମାନେ ଅନୁପାତ ଓ ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କିଛି ଜାଣିଛ । ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକାରର ଅନୁପାତ, ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଏବଂ ଉକ୍ତ ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ପାଟିଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନର ପ୍ରଣାଳୀ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଅଧିକ ଆଲୋଚନା ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ।

6.2. ଅନୁପାତ (Ratio) :

ପଦାର୍ଥଗୁଡ଼ିକର ତୁଳନାତ୍ମକ ଅର୍ଥରେ ଅନୁପାତ ବ୍ୟବହାର କରାଯାଏ । ତୁଳନା କରିବାକୁ ହେଲେ ତୁଳନୀୟ ବସ୍ତୁଗୁଡ଼ିକ ଏକ ଜାତୀୟ ବା ଏକ ପ୍ରକାରର ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଦୁଇଟି ରାଶିକୁ ତୁଳନା କଲେ, ପ୍ରଥମ ରାଶି ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶିର କେତେ ଗୁଣ ବା କେତେ ଅଂଶ, ଏହା ଯେଉଁ ରାଶି ବା ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ବ୍ୟକ୍ତ ହୁଏ, ତାହାକୁ ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଅନୁପାତ (Ratio) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ 30 ମିଟର ଓ 6 ମିଟର, ଏହି ସମଜାତୀୟ ରାଶିଦ୍ୱୟକୁ ତୁଳନା କଲେ ଦେଖାଯାଏ ଯେ, 30 ମିଟର, 6 ମିଟରର 5 ଗୁଣ । ତେଣୁ 30 ମିଟର ଓ 6 ମିଟର ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଅନୁପାତ ହେଉଛି $\frac{30}{6}$ ବା 5:1 ।

ଏଠାରେ ଅନୁପାତଟି ଏକ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହେଲା ।

ପୁନଶ୍ଚ 25 ପଇସା, 1 ଟଙ୍କା ବା 100 ପଇସାର $\frac{25}{100}$ ବା $\frac{1}{4}$

$\therefore$ 25 ପଇସା ଓ 1 ଟଙ୍କା ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଅନୁପାତ ହେଉଛି $\frac{25}{100}$ ବା 1:4

ମନେକରାଯାଉ; ଗୋଟିଏ ଏକକରେ ପ୍ରକାଶିତ ରାଶି ଦୁଇଟି a ଓ b ଅଟେ । a ରାଶି ସହ b ରାଶି ଅନୁପାତକୁ a:b ବା $\frac{a}{b}$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ । (a:b କୁ a ଅନୁପାତ b ବା a is to b ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ।)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : a:b କୁ ବିକଳ୍ପ ଭାବେ $\frac{a}{b}$ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶ କରାଗଲେ ମଧ୍ୟ ଏଠାରେ ବୁଝିବାକୁ ହେବ ଯେ, a କୁ b ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରାଯାଉ ନାହିଁ । ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ ।

ମନେକର ଜଣେ ଲୋକକୁ ପାଣିରେ 100 ଗ୍ରାମ୍ ମିଶ୍ରିଥିବା ଏକ ଗ୍ଲାସ ମୃଦୁପାନୀୟ ପିଇବାକୁ ଦିଆଗଲା । ଏହାକୁ ପିଇବା ସମୟରେ ତା'ର ହୃଦ୍‌ଘାତରେ ମୃତ୍ୟୁ ହୋଇଗଲା । କିନ୍ତୁ କିଛି ଲୋକ ଏହି ମୃତ୍ୟୁ ବିଷଯୁକ୍ତ ପାନୀୟ ସେବନ ଦୁର୍ଘଟଣା ହୋଇପାରେ ବୋଲି ସନ୍ଦେହ କରି ପୋଲିସ୍‌ରେ ଏତଲା ଦେଲେ । ଫଳରେ ଏହି ପାନୀୟର ଏକ ନମୁନା ପରୀକ୍ଷା କରିବା ପାଇଁ ଡାକ୍ତରଙ୍କୁ ଦିଆଗଲା ।

ପରୀକ୍ଷା ପରେ ଜଣାପଡ଼ିଲା ଯେ ପାନୀୟ ପଦାର୍ଥରେ ବିଷ ନାହିଁ । ଯଦି ନମୁନାରେ 50 ଗ୍ରାମ୍ ମିଶ୍ରି ଥିବ, ତେବେ ମିଶ୍ରି ଓ ବିଷର ଅନୁପାତ 50:0 ହେବ ।

ଅନୁପାତର ଅର୍ଥ ହରଣ ନୁହେଁ । ଏହା ସୂଚାଉଛି କି ଦୁଇଟି ପଦାର୍ଥ ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକରେ a ଭାଗ ଥିଲେ ଅନ୍ୟଟି b ଭାଗ ହେବ ।

ଅନୁପାତ a:b ରେ a ପ୍ରଥମ ପଦ ଏବଂ b ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦ । ଏଠାରେ a ଓ b ଦୁଇଟି ପଦ ବା ରାଶି । a ପ୍ରଥମ ପଦକୁ ପୂର୍ବ ପଦ (antecedent) ଓ b ଦ୍ୱିତୀୟ ପଦକୁ ଉତ୍ତର ପଦ (consequent) କୁହାଯାଏ ।

ଯଦି $\frac{a}{b}=\frac{2}{5}$ ହୁଏ, ଏଠାରେ ପୂର୍ବପଦ 2; ଉତ୍ତରପଦ 5 । ତେଣୁ ପ୍ରଥମ ରାଶି 2, ଯାହା ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶି 5ର $\frac{2}{5}$ ଅଂଶ ।

ସେହିପରି ଯଦି $\frac{a}{b}=\frac{5}{2}$ ହୁଏ, ଏଠାରେ ପୂର୍ବପଦ 5; ଉତ୍ତରପଦ 2 ।

ତେଣୁ ପ୍ରଥମ ରାଶି 5, ଯାହା ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶି 2ର $\frac{5}{2}$ ଗୁଣ ।

ଯଦି ଦୁଇଜଣଙ୍କ ପାଖରେ 30 ଟଙ୍କା ଓ 42 ଟଙ୍କା ଥାଏ, ତେବେ ତାଙ୍କ ପାଖରେ ଥିବା ଟଙ୍କାର ଅନୁପାତ $\frac{30 \text{ ଟଙ୍କା}}{42 \text{ ଟଙ୍କା}}$ $=\frac{30}{42}$ । ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, $\frac{30}{42} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}$ । ଏଥିରୁ ବୁଝିବା ଯେ, ପ୍ରଥମ ବ୍ୟକ୍ତିର ଟଙ୍କା 5 ଗୁଣ ହେଲେ, ଦ୍ୱିତୀୟ ବ୍ୟକ୍ତିର ଟଙ୍କା 7 ଗୁଣ ହେବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ - (i) : 4 କିଲୋଗ୍ରାମ୍ ଓ 9 କିଲୋଗ୍ରାମ୍‌ର ଅନୁପାତ, 4 ଟନ୍ ଓ 9 ଟନ୍ ର ଅନୁପାତ, 4 ଲିଟର ଓ 9 ଲିଟର ଅନୁପାତ 4:9 ।

(ii) କୌଣସି ଅନୁପାତରେ ପୂର୍ବ ଓ ଉତ୍ତର ରାଶିଦ୍ୱୟକୁ ଯଦି ସମାନ ଅଣଶୂନ୍ୟ (Non-Zero) ରାଶିଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ ବା ହରଣ କରାଯାଏ, ତାହାହେଲେ ଅନୁପାତର ମୂଲ୍ୟ ଅପରିବର୍ତ୍ତିତ ରହିବ ।

(iii) ଅନୁପାତ କେବଳ ଗୋଟିଏ ରାଶି ବା ଏକ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହୁଏ । ଏହା ଏକକ ନିରେପେକ୍ଷ (Indepedent of unit) ରାଶି ।

6.2.1 ବିଭିନ୍ନ ଅନୁପାତ : (Different type of ratios)

ବର୍ଗାନୁପାତ (Duplicate Ratio) :

$\frac{a^2}{b^2}$ କୁ $\frac{a}{b}$ ର ବର୍ଗାନୁପାତ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{2}{3}$ ର ବର୍ଗାନୁପାତ $\frac{4}{9}$

ଘନାନୁପାତ (Triplicate Ratio) :

$\frac{a^3}{b^3}$ କୁ $\frac{a}{b}$ ର ଘନାନୁପାତ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{2}{3}$ ର ଘନାନୁପାତ $\frac{8}{27}$

ଘନାନୁପାତଟି ହେଉଛି $\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}$ ।

ଉପବର୍ଗାନୁପାତ କିମ୍ବା ବର୍ଗମୂଳାନୁପାତ (Subduplicate Ratio) :

$\frac{a^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$ ବା $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ କୁ $\frac{a}{b}$ ଅନୁପାତରେ ଉପବର୍ଗାନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{4}{5}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{4}{9}$ ଓ $\frac{16}{25}$ ର ଉପବର୍ଗାନୁପାତ ।

ଉପଘନାନୁପାତ କିମ୍ବା ଘନମୂଳାନୁପାତ (Sub-Triplicate Ratio) :

$\frac{a^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{1}{3}}}$ ବା $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}$ କୁ $\frac{a}{b}$ ଅନୁପାତର ଉପଘନାନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{5}{6}$ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{8}{27}$ ଓ $\frac{125}{216}$ ର ଉପବର୍ଗାନୁପାତ ।

ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ (Inverse Ratio) :

କୌଣସି ଅନୁପାତର ପୂର୍ବପଦ ଓ ଉତ୍ତର ପଦକୁ ଯଥାକ୍ରମେ ଉତ୍ତରପଦ ଓ ପୂର୍ବପଦ କରିଦେଲେ, ଯେଉଁ ନୂତନ ଅନୁପାତଟି ସୃଷ୍ଟି ହେବ, ତାହାକୁ ସେହି ଅନୁପାତର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, $\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{4}{5}$ ର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ $\frac{3}{2}$ ଓ $\frac{5}{4}$ ହେବ ।

ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ (Compound Ratio) :

ଅନୁପାତ ଗୁଡିକ ଯଦି $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ ..... ହୁଅନ୍ତି, ତେବେ ସେଗୁଡିକର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ ହେବ, $\frac{ace.....}{bdf......}$

15 : 2 , 3:4, 13:9 ଓ 5:26 ର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ = $\frac{15\times3\times13\times5}{2\times4\times9\times26}=\frac{25}{16}$

6.3 : ସମାନୁପାତ (Proportion) :

ଦୁଇ ବା ତତୋଧିକ ଅନୁପାତର ସମାନତାକୁ ସମାନୁପାତ କୁହାଯାଏ । $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ଗୋଟିଏ ସମାନୁପାତ ।

ଏହି ସମାନୁପାତକୁ a:b :: c:d ବା a:b = c:d ମଧ୍ୟ ଲେଖାଯାଇପାରେ । ଏଠାରେ ରାଶି ଚାରୋଟି a,b,c,d ସମାନୁପାତୀ (Proportional) ବା ସମାନୁପାତ ବିଶିଷ୍ଟ ।

ଉପରୋକ୍ତ ସମାନୁପାତରେ a,b,c,d କୁ ଯଥାକ୍ରମେ ପ୍ରଥମ, ଦ୍ୱିତୀୟ, ତୃତୀୟ ଓ ଚତୁର୍ଥ ପଦ ବା ରାଶି କୁହାଯାଏ । a ଓ d କୁ ପ୍ରାନ୍ତରାଶି (extremes) ଏବଂ b ଓ c କୁ ମଧ୍ୟରାଶି (means) କୁହାଯାଏ । d ରାଶିକୁ a, b ଓ c ରାଶିଗୁଡିକର ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ (Fourth proportional) କୁହାଯାଏ ।

a, b, c ଓ d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, a : b = c : d ହେବ ।

$\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$ [bd ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୁଣାଗଲା]

∴ ପ୍ରାନ୍ତରାଶି ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = ମଧ୍ୟରାଶି ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ

ଅର୍ଥାତ୍ **ଚାରିଗୋଟି ରାଶି ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରାନ୍ତ ରାଶିଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ, ମଧ୍ୟରାଶିଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ ସହ ସମାନ ହେବ ।**

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯଦି $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\ldots$ ହୁଏ, ତାହାହେଲେ, a,b,c,d,e,f .... ରାଶିମାନ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

6.3.1 : କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ (Continued Proportion) :

ସମଜାତୀୟ ତିନିଗୋଟି ରାଶି ମଧ୍ୟରୁ ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ରାଶିର ଅନୁପାତ, ଯଦି ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟ ରାଶିର ଅନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ହୁଏ, ସେ ଅନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧକୁ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ କୁହାଯାଏ ଏବଂ ଉକ୍ତ ରାଶିଗୁଡ଼ିକୁ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ କୁହାଯାଏ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ । ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ଅନୁପାତର ଉତ୍ତର ରାଶି, ଦ୍ୱିତୀୟ ଅନୁପାତର ପୂର୍ବ ରାଶି ସହିତ ସମାନ ଅଟେ ।

a:b :: b:c ଗୋଟିଏ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ । ଏଠାରେ b କୁ a ଓ c ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ (mean proportional) ଓ c କୁ a ଓ b ର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ (third proportional) କୁହାଯାଏ ।

ସେହିପରି ଚାରିଗୋଟି ବା ତତୋଧିକ ରାଶିକୁ ନେଇ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧ ସୃଷ୍ଟି ହୋଇପାରିବ ।

a,b,c,d ... କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}= \ldots\ldots$

a, b, c କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ $\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow ac = b^2$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ bc ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ)

∴ ପ୍ରାନ୍ତରାଶି ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = ମଧ୍ୟରାଶିର ବର୍ଗ ।

ଅର୍ଥାତ୍ (ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ)^2 = ପ୍ରାନ୍ତରାଶି ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : a,b,c,d କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେମାନେ ସର୍ବଦା ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

କିନ୍ତୁ a,b,c,d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ନହୋଇପାରନ୍ତି । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ 5, 10, 7, 14 ସମାନୁପାତୀ, ମାତ୍ର କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ନୁହଁନ୍ତି ।

6.4 ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରକ୍ରିୟା :

କୌଣସି ଗୋଟିଏ ସମାନୁପାତକୁ ନେଇ, ସେଥିରୁ ଆମେ ଆଉ କେତୋଟି ପ୍ରାମାଣିକ ନୂତନ ଅନୁପାତ ସିଦ୍ଧ କରିପାରିବା । ସେଗୁଡ଼ିକ ମୂଳ ଅନୁପାତର ଗୋଟିଏ ପ୍ରକ୍ରିୟା ବୋଲି ବିବେଚିତ ହୁଏ । ଗଣିତ ଶାସ୍ତ୍ରରେ ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାଗୁଡ଼ିକର ବିଶେଷ ଉପଯୋଗିତା ଦୃଷ୍ଟିରୁ, ପ୍ରତ୍ୟେକ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ନାମକରଣ କରାଯାଇଛି ।

1. ବ୍ୟସ୍ତାନୁପାତ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Invertendo) : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow bc = ad$

$\Rightarrow \frac{bc}{ac}=\frac{ad}{ac}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ac ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ) $\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

2. ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା (Alternendo) : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$

$\Rightarrow \frac{ad}{cd}=\frac{bc}{cd}$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ cd ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ) $\Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

3. ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Componendo) : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ 1 ଯୋଗ କଲେ)

$\Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

4. ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରୁ 1 ବିୟୋଗ କଲେ)

$\Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

5. ଯୋଗାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା (Componendo and Dividendo) : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ (ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା) .... (1)

ପୁନଶ୍ଚ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$ (ବିୟୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା) ..... (2)

(1) କୁ (2) ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କଲେ, $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

6. ସଂଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା (Addendo) : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$

ପ୍ରମାଣ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ (ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା) $\Rightarrow \frac{a+c}{c}=\frac{b+d}{d}$ (ଯୋଗ ପ୍ରକ୍ରିୟା)

$\Rightarrow \frac{a+c}{b+d}=\frac{c}{d}$ (ଏକାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା)

କିନ୍ତୁ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ ତେଣୁ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଅନୁସିଦ୍ଧାନ୍ତ : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=.......\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e+...}{b+d+f+....}$

ପ୍ରମାଣ : ମନେକର $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=......=k$

$a = bk,\ c = dk,\ e = fk....$ ଇତ୍ୟାଦି ।

$\therefore \frac{a+c+e+...}{b+d+f+....}=\frac{bk+dk+fk+....}{b+d+f+.....}=\frac{k(b+d+f+...)}{b+d+f+.....}=k$

ତେଣୁ $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=......\frac{a+c+e+....}{b+d+f+.....}$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 1 :

(i) 7, 13 ଓ 14 ର ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $a^3-b^3+ab(a-b)$, a^2-b^2 ର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ କେତେ ?

(iii) $a-b$ ଓ $4(a-b)$ ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : (i) ମନେକରାଯାଉ ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି x

$\Rightarrow 7:13 = 14 : x$

$\Rightarrow \frac{7}{13}=\frac{14}{x} \Rightarrow 7x = 13 \times 14 \Rightarrow x = 26$

$\therefore$ ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି 26 । (ଉତ୍ତର)

(ii) ମନେକର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି x

ତେଣୁ $a^3-b^3+ab(a-b) : a^2-b^2 = a^2-b^2 : x$

$\Rightarrow \frac{a^3-b^3+ab(a-b)}{a^2-b^2}=\frac{a^2-b^2}{x}$

$\Rightarrow x[(a-b)(a^2+ab+b^2)+ab(a-b)] = (a^2-b^2)^2$

$\Rightarrow x(a-b)(a^2+2ab+b^2) = [(a+b)(a-b)]^2$

$\Rightarrow x(a-b)(a+b)^2 = (a+b)^2(a-b)^2$

$\Rightarrow x(a-b) = (a-b)^2 \Rightarrow x = a-b$

$\therefore$ ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି $(a-b)$ । (ଉତ୍ତର)

(iii) ମନେକର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ x

$\therefore$ ପ୍ରାନ୍ତରାଶିଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ = ମଧ୍ୟରାଶିର ବର୍ଗ

$\therefore (a-b) \times 4(a-b) = x^2$

$\Rightarrow x^2 = 4(a-b)^2 = [\pm 2(a-b)]^2$

$\Rightarrow x = \pm 2(a-b)$

$\therefore$ ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ହେଉଛି $2(a-b)$ ବା $2(b-a)$ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 2 :

$x:y = 2:3$ ହେଲେ, $5x–2y : x+3y$ ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : $x:y = 2:3$ (ଦତ୍ତ)

$$5x-2y : x+3y = \frac{5x - 2y}{x + 3y} = \frac{\frac{5x}{y}-2}{\frac{x}{y}+3}$$ (ହର ଓ ଲବକୁ y ଦ୍ୱାରା ଭାଗକଲେ)

$$= \frac{5\left(\frac{2}{3}\right) - 2}{\left(\frac{2}{3}\right) + 3} = \frac{10 - 6}{2 + 9} = \frac{4}{11}$$

$= 5x–2y : x+3y = 4:11$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ 3 :

a, b, c, d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $a^2 : b^2 = a^2 + c^2 : b^2 + d^2$ ।

ସମାଧାନ : a, b, c d ସମାନୁପାତୀ

$\therefore \frac{a}{b}=\frac{c}{d} = k$ (ମନେକରାଯାଉ) $\Rightarrow a = bk$ ଓ $c = dk$

ବାମପକ୍ଷ = $\frac{a^2}{b^2}=\frac{(bk)^2}{b^2}=\frac{b^2k^2}{b^2} = k^2$ .... (1)

ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ = $\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}=\frac{(bk)^2+(dk)^2}{b^2+d^2}=\frac{k^2(b^2+d^2)}{b^2+d^2} = k^2$ .... (2)

(1) ଓ ରୁ (2) $\frac{a^2}{b^2}=\frac{a^2+c^2}{b^2+d^2}$

$\therefore a^2 : b^2 = a^2 + c^2 : b^2 + d^2$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 4 :

a, b ଓ c କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ $(a+b+c)(a–b+c) = a^2 + b^2 + c^2$ ।

ସମାଧାନ : a,b,c କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ । ତେଣୁ $\frac{a}{b}=\frac{b}{c} \Rightarrow ac=b^2$

ବାମପକ୍ଷ $(a+b+c)(a–b+c) = [(a+c)+b]\,[(a+c)–b]$

$= (a+c)^2 – b^2 = a^2 + 2ac + c^2 – b^2$

$= a^2 + 2b^2 + c^2 – b^2 \quad (\because ac = b^2)$

$= a^2 + b^2 + c^2$ ବାମପକ୍ଷ = ଦକ୍ଷିଣ ପକ୍ଷ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 5 :

$x+5y : x–5y = 4:7$ ହେଲେ $3x+5y : 3x–5y$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : $\frac{x+5y}{x-5y} = \frac{4}{7} \Rightarrow \frac{(x+5y)+(x-5y)}{(x+5y)-(x-5y)} = \frac{4+7}{4-7}$ (ଯୋଗାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା)

$$\Rightarrow \frac{2x}{10y} = \frac{11}{-3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{-55}{3} \Rightarrow \frac{3x}{5y} = \frac{3}{5}\left(\frac{-55}{3}\right) \Rightarrow \frac{3x}{5y} = \frac{(-11)}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{3x+5y}{3x-5y} = \frac{(-11)+1}{(-11)-1}$$ (ଯୋଗାନ୍ତର ପ୍ରକ୍ରିୟା) $$\Rightarrow \frac{3x+5y}{3x-5y} = \frac{-10}{-12} = \frac{5}{6}$$

$\therefore$ $3x + 5y : 3x - 5y = 5:6$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 6 :

a,b,c,d,e,f ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab + cd + ef)^2$

ସମାଧାନ : a,b,c,d,e,f ସମାନୁପାତୀ, ତେଣୁ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ (ମନେକର)

$\therefore$ $a = bk, c = dk, e = fk$

ବାମପକ୍ଷ $= (a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (b^2k^2+ d^2k^2+f^2k^2)(b^2+d^2+f^2)$

$= k^2(b^2+d^2+f^2)(b^2+d^2+f^2) = k^2(b^2+ d^2+f^2)^2$ .....(1)

ଦକ୍ଷିଣପକ୍ଷ $= (ab + cd+ ef)^2 = (bkb +dkd+fkf)^2 = (b^2k +d^2k+f^2k)^2$

$= k^2(b^2+d^2+f^2)^2$ ....(2)

(1) ଓ (2) ରୁ $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab + cd+ ef)^2$ (ପ୍ରମାଣିତ)

ଉଦାହରଣ - 7 :

ଅର୍ପିତା ଓ ନନ୍ଦିତାଙ୍କର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସର ଅନୁପାତ 9 : 7 । 4 ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସର ଅନୁପାତ 4 : 3 ଥିଲା । ତେବେ 4 ବର୍ଷ ପରେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସର ଅନୁପାତ କେତେ ହେବ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ଅର୍ପିତାର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ 9x ବର୍ଷ ଓ ନନ୍ଦିତାର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ 7x ବର୍ଷ । ଚାରିବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସ ଯଥାକ୍ରମେ (9x–4) ବର୍ଷ ଓ (7x–4) ବର୍ଷ ଥିଲା ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{9x-4}{7x-4} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow$ $27x-12 = 28x-16 \quad \Rightarrow x = 4$

ଚାରିବର୍ଷ ପରେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସ ହେବ (9x+4) ବର୍ଷ ଓ (7x+4) ବର୍ଷ ।

$$\frac{9x + 4}{7x + 4} = \frac{9(4) + 4}{7(4) + 4} = \frac{40}{32} = \frac{5}{4}$$

$\therefore$ 4 ବର୍ଷ ପରେ ସେମାନଙ୍କର ବୟସର ଅନୁପାତ 5 : 4 ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 :

7000 ଟଙ୍କାକୁ A, B ଓ C ମଧ୍ୟରେ ଏପରି ବାଣ୍ଟିଦିଅ ଯେ A ଓ B, B ଓ C ପାଇଥିବା ଟଙ୍କାର ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 : 3 ଓ 3 : 4 ହେବ ।

ସମାଧାନ : ମନେକର A, B, C ପାଇଥିବା ଟଙ୍କା ଯଥାକ୍ରମେ a, b, c ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$ ଓ $\frac{b}{c}=\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{a}{2}=\frac{b}{3}$ ଓ $\frac{b}{4}=\frac{c}{5} \Rightarrow \frac{a}{8}=\frac{b}{12}$ ଓ $\frac{b}{12}=\frac{c}{15}$

$\therefore \ \frac{a}{8}=\frac{b}{12}=\frac{c}{15}=k$ (ମନେକରାଯାଉ)

$\therefore \ a = 8k, \ b = 12k, \ c = 15k$ ....(1)

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $a + b + c = 7000 \Rightarrow 8k + 12k + 15k = 7000$

$\Rightarrow 35k = 7000 \quad \therefore k = 200$

k ର ଏହି ମାନକୁ (1) ରେ ପ୍ରୟୋଗ କଲେ,

$a = 1600, \quad b = 2400, \quad c = 3000$

∴ A, B, C ର ଟଙ୍କା ଯଥାକ୍ରମେ 1600 ଟଙ୍କା, 2400 ଟଙ୍କା ଓ 3000 ଟଙ୍କା । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 9 :

ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଅଷ୍ଟମ, ନବମ ଓ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ 3 : 1, 5 : 3 ଓ 7 : 5 ଅଟେ । ପ୍ରତି ଶ୍ରେଣୀରେ ଯଦି ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ଥାଆନ୍ତି ତେବେ, ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା 3x ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା x

∴ ଅଷ୍ଟମ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ସଂଖ୍ୟା = $3x + x = 4x$

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା 5y ଓ 3y ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା

ନବମ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ସଂଖ୍ୟା = $5y + 3y = 8y$

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା 7z ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟା 5z

ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀରେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ସଂଖ୍ୟା = $7z + 5z = 12z$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $4x=8y=12z$

$\therefore \ \frac{4x}{24}=\frac{8y}{24}=\frac{12z}{24} \Rightarrow \frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{z}{2}=k$ (ମନେକରାଯାଉ)

$\therefore x = 6k, \ y = 3k, z = 2k$

ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା = $x+3y+5z$ ଏବଂ ଛାତ୍ରୀସଂଖ୍ୟା = $3x + 5y + 7z$

ତେଣୁ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ = $\frac{x+3y+5z}{3x+5y+7z}$

$$= \frac{6k+3(3k)+5(2k)}{3(6k)+5(3k)+7(2k)} = \frac{6k+9k+10k}{18k+15k+14k} = \frac{25k}{47k} = \frac{25}{47}$$

∴ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ 25:47 । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 :

ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଅନୁପାତ 2:1 ଓ ଅନ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥର ଅନୁପାତ 4:3 ଅଟେ । ଉକ୍ତ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ 2:3 ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ପରିସୀମାର ଅନୁପାତ କେତେ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ପ୍ରଥମ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 2x ଓ ପ୍ରସ୍ଥ = x ଏବଂ

ଦ୍ୱିତୀୟ ଆୟତକ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ = 4y ପ୍ରସ୍ଥ = 3y

ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 2x \cdot x = 2x^2$ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ କ୍ଷେତ୍ରର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ $= 4y \cdot 3y = 12y^2$

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $\frac{2x^2}{12y^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow x^2 = 4y^2 \Rightarrow x = 2y \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{2}{1}$

ପୁନଶ୍ଚ ପ୍ରଥମ କ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା $= 2(2x+x) = 6x$ ଏବଂ ଦ୍ୱିତୀୟ କ୍ଷେତ୍ରର ପରିସୀମା $= 2(4y+3y) = 14y$

ତେଣୁ ପରିସୀମା ଦ୍ୱୟର ଅନୁପାତ $= \frac{6x}{14y} = \frac{6}{14} \times \frac{2}{1} = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}$

$\therefore$ କ୍ଷେତ୍ରଦ୍ୱୟର ପରିସୀମାର ଅନୁପାତ 6 : 7 (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6

1. ବନ୍ଧନୀ ମଧ୍ୟରୁ ଠିକ୍ ଉତ୍ତରଟି ବାଛି ଶୂନ୍ୟସ୍ଥାନ ପୂରଣ କର ।

(i) a:b=3:4, b:c=5:6, c:d=11:9 ହେଲେ, a:d=.... (65:84, 30:40, 55:72, 45 : 63)

(ii) $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{2}{5}$ ହେଲେ, $\frac{a}{d}$ =.... $\left(\frac{4}{25}, \frac{5}{2}, \frac{8}{125}, \frac{2}{25}\right)$

(iii) p:q :: r:s ହେଲେ, p:r =... (q:s, s:q, p:s, q:r)

(iv) a:b=2:3 ହେଲେ, (4a+b) : (2a+3b) =.... (3:5, 5:8, 7:9, 11:13)

(v) 2x=3y=4z ହେଲେ, x:y:z = ... (2:3:4,6:4:3,2:3:4, 4:3:2)

(vi) x:y=2:5, y:z=3:4 ହେଲେ, x:y:z =.... (20:15:6, 6:15:20, 2:5:3, 5:3:4)

(vii) 3:(k+2) :: 5:(k+4) ହେଲେ, k =.... (2,4,1,6)

2. ନିମ୍ନ ଉକ୍ତି ଗୁଡିକ ଠିକ୍ ବା ଭୁଲ୍ ଦର୍ଶାଅ ।

(i) a, b, c, d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସମସ୍ତ ରାଶି ଏକ ଜାତୀୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

(ii) a, b, c, d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେମାନେ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

(iii) କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀରେ ସମସ୍ତ ରାଶି ଏକ ଜାତୀୟ ହେବେ ।

(iv) ଚାରୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରଥମ ଓ ଚତୁର୍ଥର ଅନୁପାତ, ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟର ଘନାନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ।

(v) ତିନୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରଥମ ଓ ତୃତୀୟର ଅନୁପାତ, ଦ୍ୱିତୀୟ ଓ ତୃତୀୟର ବର୍ଗାନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ।

(vi) ଚାରୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରଥମ ଓ ଦ୍ୱିତୀୟର ଅନୁପାତ, ପ୍ରଥମ ଓ ତୃତୀୟର ଉପବର୍ଗାନୁପାତ ସହିତ ସମାନ ।

(vii) a, b, c କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, a+2, b+2, c+2 ମଧ୍ୟ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

(viii) ଚାରୋଟି ରାଶି କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

3. ନିମ୍ନ ରାଶିମାନଙ୍କର ଚତୁର୍ଥ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 5,7,15 (ii) 0.1, 0.01, 0,001

(iii) $a,\ a^2b,\ a^2b^2$ (iv) $a^2 - b^2,\ a+b,\ a-b$

(v) $a^2+5a + 6\ ,\ 3a + 6,\ 4a + 12$ (vi) $a^3 - b^3,\ a^4+a^2 b^2 +b^4,\ a - b$

4. ଦତ୍ତ ରାଶିମାନଙ୍କର ତୃତୀୟ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 9, 15 (ii) a^2b, ab^2

(iii) $x^2 - y^2,\ x + y$ (iv) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a},\ \sqrt{a^2+b^2}$

5. ନିମ୍ନ ରାଶିଗୁଡ଼ିକର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) 9, 25 (ii) $4a^2b, 9bc^2$ (iii) $(a-b)\ (a+b)^3,\ (a+b)\ (a-b)^3$

6. (i) (2+a) ଓ (5+a) ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ (3+a) ହେଲେ, a ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(ii) (23– x), (28– x) ଓ (19– x) ର ମଧ୍ୟସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, x ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(iii) a ଓ c ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ b ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ a^2+b^2 ଓ b^2+c^2 ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ ab+bc ହେବେ ।

(iv) ଯଦି b, a ଓ c ର ମଧ୍ୟସମାନୁପାତୀ ହୁଏ ତେବେ ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $(ab+bc+ca)^3 = abc\ (a+b+c)^3$

7. (i) 1, 7, 17 ପ୍ରତ୍ୟେକରେ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ଯୋଗ କଲେ, ଯୋଗଫଳ ଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ?

(ii) 6, 14, 18 ଓ 38 ପ୍ରତ୍ୟେକରେ କେତେ ଯୋଗ କଲେ ଯୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ /

(iii) 5, 9, 17 ପ୍ରତ୍ୟେକରୁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କଲେ, ବିୟୋଗଫଳ ଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ?

(iv) 14, 17, 34 ଓ 42 ପ୍ରତ୍ୟେକରୁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟା ବିୟୋଗ କଲେ, ବିୟୋଗଫଳଗୁଡ଼ିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ?

8. (i) a:b = 2:3 ହେଲେ, (3a+4b) : (4a+5b) ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(ii) a:b=3:4 ହେଲେ, (6a+5b) : (5a+4b) ର ମୂଲ୍ୟ ନିରୂପଣ କର ।

(iii) 581 କୁ a, b, c ତିନୋଟି ଅଂଶରେ ଭାଗକର ଯେପରି 4a=5b=7c ହେବ ।

(iv) $6x+5y : 6x-5y = 3:2$ ହେଲେ, $2x+3y : 2x-3y$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

(v) $(a-b) : (a+b) = 1:5$ ହେଲେ, $a^2-b^2 : a^2+b^2$ ର ମାନ ସ୍ଥିର କର ।

9. a, b, c, d ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ

(i) $pa+qc : pb+qd = ma+nc : mb+nd$

(ii) $3a+4b : 3c+4d = \sqrt{a^2+b^2} : \sqrt{c^2+d^2}$

(iii) $b^2 : d^2 = a^2+b^2 : c^2+d^2$

(iv) $a^2+b^2 : c^2+d^2 = b^2+d^2 : a^2+c^2$

10. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $\frac{ac}{bd}=\frac{a^2-3c^2+5e^2}{b^2-3d^2+5f^2}$

(ii) $\frac{ace}{bdf}=\frac{a^3+c^3+e^3}{b^3+d^3+f^3}$

(iii) $\frac{(a+c+e)^3}{(b+d+f)^2}=\frac{a^3}{b^2}+\frac{c^3}{d^2}+\frac{e^3}{f^2}$

(iv) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{4a-6c-9e}{4b-6d-9f}$

(v) $(a^2+c^2+e^2)(b^2+d^2+f^2) = (ab+cd+ef)^2$

11. a, b, c କ୍ରମିକ ସାମନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $a:c = a^2 : b^2$

(ii) $a:c = (a^2+b^2) : (b^2+c^2)$

(iii) $(a^2+b^2)(b^2+c^2) = (ab+bc)^2$

(iv) $2a+3b : 3a+2b = 2b+3c : 3b+2c$

12. a, b, c, d କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ,

(i) $(b+c)(b+d) = (c+a)(c+d)$

(ii) $\frac{a}{c}=\frac{a^2-b^2+c^2}{b^2-c^2+d^2}$

(iii) $\frac{ab+cd}{ab-cd}=\frac{b^2+d^2}{b^2-d^2}$

(iv) $a-b$ ଓ $c-d$ ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ $b-c$

(v) a^2-b^2 ଓ c^2-d^2 ର ମଧ୍ୟ ସମାନୁପାତୀ b^2-c^2

(vi) $(b-c)^2+(c-a)^2+(b-d)^2 = (a-d)^2$

13. (i) $x = \frac{2ab}{a+b}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=2$ ।

(ii) $x = \frac{6ab}{a+b}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{x+3a}{x-3a}+\frac{x+3b}{x-3b}=2$ ।

(iii) $x = \frac{8ab}{a+b}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $\frac{x+4a}{x-4a}+\frac{x+4b}{x-4b}=2$ ।

14. (i) x+y, y+z, x-y, y-z ସମାନୁପାତୀ ହେଲେ,
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, x,y,z କ୍ରମିକ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

(ii) $\frac{x}{b+c}=\frac{y}{c+a}=\frac{z}{a+b}$ ହେଲେ, ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

(iii) $\frac{x}{b^2+bc+c^2}=\frac{y}{c^2+ca+a^2}=\frac{z}{a^2+ab+b^2}$ ହେଲେ,
ପ୍ରମାଣ କର ଯେ, $(b-c)x+(c-a)y+(a-b)z=0$

15. ସ୍ମିତି, ସୃଷ୍ଟି ଠାରୁ ଦୁଇ ବର୍ଷ ବଡ଼ । ଦଶ ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ସୃଷ୍ଟି ଓ ସ୍ମିତିର ବୟସର ଅନୁପାତ 1 : 2 ଥିଲା । ବର୍ତ୍ତମାନ ସେମାନଙ୍କର ବୟସ କେତେ ?

16. ଚାରି ବର୍ଷ ପୂର୍ବେ ଅନିଲ୍ ଓ ସୁନିଲ୍‌ର ବୟସର ଅନୁପାତ 3 : 5 ଥିଲା । ଚାରିବର୍ଷ ପରେ ଏହି ଅନୁପାତ 5 : 7 ହେବ । ବର୍ତ୍ତମାନ କାହାର ବୟସ କେତେ ?

17. 1400 ଜଣ ଛାତ୍ରଥିବା ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଶିକ୍ଷକ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ 35 : 2 ଅଟେ । ଆଉ ଅଧିକ କେତେ ଜଣ ଶିକ୍ଷକ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଯୋଗଦେଲେ, ଏହି ଅନୁପାତ 25 : 2 ହେବ ?

18. 60 ଲିଟର ମିଶ୍ରଣରେ କ୍ଷୀର ଓ ଜଳର ଅନୁପାତ 2 : 1 । ସେଥିରେ ଆଉ କେତେ ଲିଟର ଜଳ ମିଶାଇଲେ, ମିଶ୍ରଣରେ କ୍ଷୀର ଓ ଜଳର ଅନୁପାତ 8 : 5 ହେବ ?

19. A ଓ B ଆୟର ଅନୁପାତ 3 : 2 ଏବଂ ସେମାନଙ୍କର ବ୍ୟୟର ଅନୁପାତ 5 : 3 ଅଟେ । ଯଦି ପ୍ରତ୍ୟେକ 1500 ଟଙ୍କା ସଞ୍ଚୟ କରୁଥିବେ, ତେବେ B ର ଆୟ କେତେ ?

20. (i) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, 3 : 4 ର ବର୍ଗାନୁପାତ, 15 : 17 ର ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତ ଏବଂ 25: 42 ର ବର୍ଗମୂଳାନୁପାତର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ 51 : 112 ହେବ ।

(ii) ଦର୍ଶାଅ ଯେ, 7 : 6 ର ବର୍ଗାନୁପାତ, 125 : 343 ର ଘନମୂଳାନୁପାତ ଏବଂ 35 : 36 ପ୍ରତିଲୋମୀ ଅନୁପାତର ଯୌଗିକ ଅନୁପାତ 1 : 1 ହେବ ।

21. 120 ଟଙ୍କାକୁ A,. B, C ମଧ୍ୟରେ ଏପରି ବାଣ୍ଟିଦିଅ ଯେପରି, ସେମାନେ ପାଉଥିବା ଟଙ୍କାରୁ ଯଥାକ୍ରମେ 15 ଟଙ୍କା, 10 ଟଙ୍କା ଓ 5 ଟଙ୍କା କମାଇ ଦେଲେ, ସେମାନଙ୍କର ଅବଶିଷ୍ଟ ଟଙ୍କା 2, 3, 4 ସହ ସମାନୁପାତୀ ହେବେ ।

22. ତିନି ଶ୍ରେଣୀ ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଅଷ୍ଟମ, ନବମ ଓ ଦଶମ ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ଯଥାକ୍ରମେ 2 : 3, 3 : 7 ଓ 7 : 8 ଅଟେ । ଶ୍ରେଣୀ ତିନୋଟିରେ ସମାନ ସମାନ ସଂଖ୍ୟକ ପିଲା ପଢୁଥିଲେ ତେବେ ବିଦ୍ୟାଳୟରେ ଛାତ୍ର ଓ ଛାତ୍ରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

23. ସମାନୁପାତ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ତଥ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକର ପ୍ରୟୋଗରେ ସମାଧାନ କର ।

(i) $\frac{\sqrt{3x}+\sqrt{2x+1}}{\sqrt{3x}-\sqrt{2x+1}}$ s = 5 (ii) $\frac{\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+1}}=4$ (iii) $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=b$

ପରିସଂଖ୍ୟାନ

(STATISTICS)

7.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ 'ପରିସଂଖ୍ୟାନ' ବିଷୟରେ ଅର୍ଥାତ୍ ତଥ୍ୟ (Data), ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ ତଥା ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ସଫଳ ଉପସ୍ଥାପନା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପଢ଼ିଛ । ତଥ୍ୟକୁ ନେଇ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତିକରଣ, ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ, ତଥ୍ୟାବଳୀର ସଂଭାଗୀକରଣ ଏବଂ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଲୈଖିକ ପରିପ୍ରକାଶ ଯଥା: ସ୍ତମ୍ଭଲେଖ, ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍, ବୃତ୍ତଲେଖ, ଚିତ୍ରଲେଖ ଇତ୍ୟାଦିର ଅଙ୍କନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅବଗତ ଅଛ । ଏ ସମସ୍ତ ଆଲୋଚନା ସହ ଏହାର ଅଧିକ ଆଲୋଚନା କରିବା ଏ ଅଧ୍ୟାୟର ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ।

7.2 ଐତିହାସିକ ପୃଷ୍ଠଭୂମି (Historical back-ground) :

'ପରିସଂଖ୍ୟାନ'ର ଇଂରାଜୀ ପ୍ରତିଶବ୍ଦ ହେଉଛି **Statistics** ଏବଂ ଏହି ଶବ୍ଦର ଅର୍ଥ ଲାଟିନ୍ ଶବ୍ଦ Status ଅଥବା ଇଟାଲୀୟ ଶବ୍ଦ Statista ରୁ ଉଦ୍ଭବ ବୋଲି ମନେହୁଏ । ଉପରିସ୍ଥ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଶବ୍ଦର ଅର୍ଥ ହେଉଛି 'ରାଜନୈତିକ ଅବସ୍ଥା' ।

ଭାରତବର୍ଷରେ ଦୁଇହଜାର ବର୍ଷପୂର୍ବେ ମଧ୍ୟ ଚନ୍ଦ୍ରଗୁପ୍ତ ମୌର୍ଯ୍ୟଙ୍କର ଶାସନକାଳରେ (ଖ୍ରୀ.ପୂ. 324-300) ପରିସଂଖ୍ୟାନର ବହୁଳ ବ୍ୟବହାର ହୋଇଥିବାର ଅନେକ ସୂଚନା ମିଳେ । କୌଟିଲ୍ୟଙ୍କ ଅର୍ଥଶାସ୍ତ୍ରରୁ ଖ୍ରୀ.ପୂ. 300 ବେଳକୁ ମଧ୍ୟ ଭାରତ ଭୂଖଣ୍ଡରେ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଉନ୍ନତ ଧରଣର ପରିସଂଖ୍ୟାନ ପଦ୍ଧତି ଅନୁସରଣ କରାଯାଉଥିବାର ଯଥେଷ୍ଟ ପ୍ରମାଣ ମିଳେ । ଆକବରଙ୍କ ରାଜତ୍ୱ (1556-1605 ଖ୍ରୀ.ଅ.) କାଳରେ ତାଙ୍କର ଜମିଜମା ଓ ରାଜସ୍ୱ ମନ୍ତ୍ରୀ ତୋଦରମଲ୍ଲ ଜମି ତଥା ଶସ୍ୟ ଉତ୍ପାଦନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଉନ୍ନତ ଧରଣର ପରିସଂଖ୍ୟାନ ସଂଗ୍ରହ କରୁଥିବାର ସୂଚନା ଭାରତ ଇତିହାସରୁ ଜଣାଯାଏ । ରାଜ୍ୟ ଶାସନରେ ପରିସଂଖ୍ୟାନର ପ୍ରଭୂତ ବ୍ୟବହାର ଯୋଗୁ ଏହି ବିଷୟଟିକୁ ଅନେକ **(ରାଜକୀୟ ବିଜ୍ଞାନ) (Science of Kings)** ବୋଲି କହିଥା'ନ୍ତି ।

ପଞ୍ଚଦଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଜର୍ମାନୀର ରାଜ୍ୟମାନଙ୍କର ଆପେକ୍ଷିକ ଶକ୍ତି କଳନା ଲକ୍ଷ୍ୟରେ ଜନ ଶକ୍ତି , ଶିଳ୍ପ ତଥା କୃଷି ଉତ୍ପାଦନ ଆଦିର କଳନା କରିବାର ବ୍ୟବସ୍ଥା ହୋଇଥିଲା । ଇଂଲଣ୍ଡରେ ନେପୋଲିୟନ୍‌ଙ୍କ ସମୟର ଯୁଦ୍ଧହିଁ ରାଜ୍ୟ ଶାସନରେ ଜନ ଶକ୍ତି, କୃଷିଜାତ ଦ୍ରବ୍ୟ, ଲୋକଙ୍କର ଆର୍ଥିକ ଅବସ୍ଥା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ କରିବାର

ଆବଶ୍ୟକତା ସୃଷ୍ଟି କରିଥିଲା । ଏହିଭଳି ବହୁ ପୁରାକାଳରୁ ମନୁଷ୍ୟ ପରିସଂଖ୍ୟାନକୁ ନିଜର ତଥାସମାଜର ସୁପରିଚାଳନାରେ ଲଗାଇ ଆସିଛି ।

ସାର୍ ରୋନାଲ୍ଡ଼ (1890-1962) ପ୍ରଥମେ ପରିସଂଖ୍ୟାନର ବ୍ୟବହାରର ପରିସରକୁ ବହୁ ପରିମାଣରେ ବଢ଼ାଇ ଦେଇଥିବାରୁ ତାଙ୍କୁ **'ପରିସଂଖ୍ୟାନର ଜନ୍ମଦାତା' (Father of Statistics)** ଆଖ୍ୟା ଦିଆଯାଏ ।

ଏହି ବିଜ୍ଞାନ ଯୁଗରେ ପରିସଂଖ୍ୟାନର ବ୍ୟବହାର ବହୁ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଦେଖାଯାଏ । କୃଷି, ଶିଳ୍ପ, ସ୍ୱାସ୍ଥ୍ୟ, ଶିକ୍ଷା, ଶାସନ ଆଦି କ୍ଷେତ୍ରରେ ପରିସଂଖ୍ୟାନ ବିନା କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିବା ସମ୍ଭବ ନୁହେଁ । ପ୍ରତ୍ୟହ ଖବର କାଗଜ ପୃଷ୍ଠାରେ ମଧ୍ୟ ପରିସଂଖ୍ୟାନଗତ ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟ ପ୍ରକାଶ ପାଉଥିବାର ଦେଖାଯାଏ ।

ପରିସଂଖ୍ୟାନ ସଂଜ୍ଞା :

'ପରିସଂଖ୍ୟାନ'ର ବିଭିନ୍ନ ସଂଜ୍ଞାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ **କ୍ରକ୍ସଟନ୍ ଓ କାଓଡ଼େନ୍**ଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ଦତ୍ତ ସଂଜ୍ଞା ସର୍ବୋତ୍କୃଷ୍ଟ ବିବେଚିତ ହୁଏ । ସଂଜ୍ଞା ହେଲା :-

'ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ, ଏହାର ବିଶ୍ଳେଷଣ ଓ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଜ୍ଞାନ ହିଁ ପରିସଂଖ୍ୟାନ ।''

ଏହି ଉକ୍ତିର ଅର୍ଥ ନିମ୍ନସ୍ଥ ଉଦାହରଣରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ ହେବ । ଆମ ରାଜ୍ୟର ଅଧିବାସୀମାନଙ୍କର ବାର୍ଷିକ ଆୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆମେ ଯଦି କହୁ, 'ଏ ରାଜ୍ୟର ଅଧିବାସୀମାନଙ୍କର ବାର୍ଷିକ ଆୟ ଅତ୍ୟନ୍ତ କମ୍', ତେବେ ସେଥିରୁ କୌଣସି ସ୍ପଷ୍ଟ ଧାରଣା କରିବାକୁ ହେଲେ ଆମକୁ କେଉଁ ଆୟସୀମା ମଧ୍ୟରେ କେତେ ଲୋକ ଅଛନ୍ତି ତା'ର ତଥ୍ୟ ସାରା ରାଜ୍ୟରୁ ସଂଗ୍ରହ କରିବାକୁ ହେବ । ସେହି **ତଥ୍ୟକୁ ବିଜ୍ଞାନ ସମ୍ମତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ଉପସ୍ଥାପନା କରିବାକୁ ହେବ ଅର୍ଥାତ୍ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ସଜାଇ ରଖିବାକୁ ହେବ । ତା'ପରେ ସେ ସୁସଜ୍ଜିତ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ବ୍ୟାଖ୍ୟା ଓ ବିଶ୍ଳେଷଣକରି ତହିଁରୁ ଉଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ପହଞ୍ଚିବାକୁ ହେବ । ଉପରୋକ୍ତ ପର୍ଯ୍ୟାୟମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟ ଦେଇ କୌଣସି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେବା ପ୍ରକ୍ରିୟାହିଁ ପରିସଂଖ୍ୟାନ ।**

7.3 ତଥ୍ୟ (Data) :

'ତଥ୍ୟ' କହିଲେ ଆମେ 'ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟ' ବୋଲି ବୁଝିବା । 'ଅଳ୍ପ' 'ବହୁତ' ଏସବୁ ଶବ୍ଦ ବ୍ୟବହାର ଦ୍ୱାରା ଅନେକ ସମୟରେ ବିଭିନ୍ନ ବସ୍ତୁର ପରିମାଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ସୂଚନା ଦିଆଯାଇଥାଏ । ମାତ୍ର ସେହି ଶବ୍ଦଗୁଡ଼ିକ ମାଧ୍ୟମରେ ପରିମାଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କୌଣସି ସ୍ପଷ୍ଟ ଧାରଣା ମିଳେ ନାହିଁ । ଅନ୍ୟ ପକ୍ଷରେ ସଂଖ୍ୟା ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ ହେଲେ ପରିମାଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ସ୍ପଷ୍ଟ ଧାରଣା ଜନ୍ମିଥାଏ । ଯଥା, 'ଗତକାଲିର ସଭାରେ ବହୁଲୋକ ଉପସ୍ଥିତ ଥିଲେ' ଓ 'ଗତକାଲିର ସଭାରେ ପ୍ରାୟ 5000 ଲୋକ ଉପସ୍ଥିତ ଥିଲେ', ଉକ୍ତିଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରୁ ଦ୍ୱିତୀୟ ଉକ୍ତିଦ୍ୱାରା ସଭାସ୍ଥଳରେ ଉପସ୍ଥିତ ଜନସଂଖ୍ୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅଧିକ ସ୍ପଷ୍ଟ ଧାରଣା କରିହୁଏ । ପ୍ରଥମ ଉକ୍ତିରେ 'ବହୁ' ଶବ୍ଦଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ତଥ୍ୟ ଏକ ସାଧାରଣ ତଥ୍ୟ, ମାତ୍ର ଦ୍ୱିତୀୟ ଉକ୍ତିରେ 5000 ଏକ ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟ । **'ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟ' (Numerical data)** ହେଉଛି ପରିସଂଖ୍ୟାନର ମୂଳଭିତ୍ତି ।

କୌଣସି ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଲକ୍ଷ୍ୟକୁ ଆଖିରେ ରଖି ସାଧାରଣତଃ ଅନୁସନ୍ଧାନକାରୀମାନେ ପ୍ରତ୍ୟକ୍ଷଭାବରେ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ କରିଥା'ନ୍ତି । ଏହିପରି ସଂଗୃହୀତ ତଥ୍ୟକୁ **ପ୍ରାଥମିକ ତଥ୍ୟ (Primary data)** କୁହାଯାଏ ।ମାତ୍ର କେତେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସମୟ, ସୁବିଧା ବା ଅର୍ଥାଭାବରୁ ପୁସ୍ତକାଗାର, ସରକାରୀ କାଗଜପତ୍ର ବା ଖବରକାଗଜରୁ ମଧ୍ୟ ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ

କରାଯାଇଥାଏ । ଏଭଳି ତଥ୍ୟକୁ **ପରୋକ୍ଷ ତଥ୍ୟ (Secondary data)** କୁହାଯାଏ । ତୁମ ଅଞ୍ଚଳରେ ନଡ଼ିଆଚାଷ ପ୍ରତି ଲୋକଙ୍କର ଆଗ୍ରହ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଅନୁଧ୍ୟାନ କରିବା ଲାଗି ତୁମେ ମଧ୍ୟ ତୁମ ଗ୍ରାମରେ ଘର ଘର ବୁଲି କାହା ବାଡ଼ିରେ କେତୋଟି ନଡ଼ିଆଗଛ ଅଛି ଏହି ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ କରିପାର । ମାତ୍ର ଏହି ତଥ୍ୟ ସଂଗ୍ରହ ପ୍ରକ୍ରିୟା ଏଠାରେ ତୁମଲାଗି ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ନ ହୋଇ କୌଣସି ସୂତ୍ରରୁ ସଂଗୃହୀତ ତଥ୍ୟର ଉପସ୍ଥାପନା ଓ ବିଶ୍ଳେଷଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ପାଇଁ ଅଧିକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ।

ସଂଗୃହୀତ ତଥ୍ୟକୁ **ଲବ୍ଧାଙ୍କ (Score)** କୁହାଯାଏ । ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ପ୍ରଥମେ ଉପଯୁକ୍ତ ପ୍ରଣାଳୀରେ ଉପସ୍ଥାପିତ କରାଯିବା ଆବଶ୍ୟକ । ନହେଲେ ଏଥିରୁ କୌଣସି ସୂଚନା ମିଳିବ ନାହିଁ । ବର୍ତ୍ତମାନ ଉପସ୍ଥାପନାର ବିଭିନ୍ନ ପ୍ରଣାଳୀ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରିବା ।

7.4 ସଂଗୃହୀତ ତଥ୍ୟର ଉପସ୍ଥାପନା (Presentation of data) :

କୌଣସି ଏକ ବିଦ୍ୟାଳୟରୁ ସଂଗୃହୀତ ନିମ୍ନସ୍ଥ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଉଦାହରଣକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର । କୌଣସି ପରୀକ୍ଷାରେ 30 ଜଣ ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀ ପାଇଥିବା ନମ୍ବର ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲେଖାଯାଇଛି । ସାରଣୀରେ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟା (Total marks) 50 ରୁ ସେମାନଙ୍କର ପ୍ରାପ୍ତାଙ୍କ ଦିଆଯାଇଛି ।

ସାରଣୀ-1

(30 ଜଣ ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କର ନମ୍ବର ତାଲିକା)

19, 14, 10, 12, 24, 29, 34, 10, 14, 12, 19, 24, 40, 34, 24, 5, 7, 19,
12, 14, 24, 19, 38, 32, 29, 24, 19, 19, 14, 25

ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଥିବା 30ଟି ଲବ୍ଧାଙ୍କକୁ ଦେଖି ପିଲାମାନଙ୍କର ସାମୂହିକ ପରୀକ୍ଷାଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆମେ କୌଣସି ଧାରଣା କରିବା ସହଜ ନୁହେଁ । ଯଥା ସର୍ବାଧିକ ନମ୍ବର କେତେ , ସର୍ବନିମ୍ନ ନମ୍ବର କେତେ, ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ଭଲ ଛାତ୍ର କେତେ , ମଧ୍ୟମ ଧରଣର ଛାତ୍ର କେତେ, ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ନମ୍ବର ଠାରୁ ଅଧିକ ବା କମ୍ ନମ୍ବର ରଖିଥିବା ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା କେତେ, ଏହିଭଳି ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଉପରୋକ୍ତ ସାରଣୀରୁ ସହଜରେ ପାଇହେବ ନାହିଁ । ଏଣୁ ସଂଗୃହୀତ ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ଏପରି ଉପସ୍ଥାପିତ କରିବାକୁ ହେବ ଯେପରି ସେହି ଉପସ୍ଥାପନାରୁ ଉପରୋକ୍ତ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ପାଇବା ସହଜ ହେବ । ସାରଣୀ-1ରେ ଥିବା ତଥ୍ୟଗୁଡ଼ିକୁ **Raw data ବା ଅପକ୍ୱ ତଥ୍ୟ** କୁହାଯାଏ । ଏଗୁଡ଼ିକୁ ଲେଖିଲାବେଳେ ସଂଗୃହିତ କ୍ରମକୁ ବଜାୟ ରଖାଯାଇଛି ।

7.4.1 ପୌନଃପୁନ୍ୟ ବିତରଣ ସାରଣୀ (Frequency distribution table) :

ଏହି ପ୍ରକାର ଉପସ୍ଥାପନା ସମୟରେ ଦୁଇଟି ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ପାଦନ କରାଯାଏ । ସେ ଦୁଇଟି ପ୍ରକ୍ରିୟାହେଲା-

(i) ଅପକ୍ୱ ତଥ୍ୟ (Raw data) ବା ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମ (ascending order) ବା ଅଧଃକ୍ରମ (descending order)ରେ ସଜାଇ ରଖିବା । ଏ ପ୍ରକାର ସଜାଇ ରଖିବାକୁ ଗୋଟିଏ ବିନ୍ୟାସ ବା Array କୁହାଯାଏ ।

ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟସମୂହକୁ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ସଜାଇ ରଖିଲେ,

5, 7, 10, 10, 12, 12, 12,14, 14, 14, 14, 19, 19, 19, 19, 19, 19, 22, 24, 24, 24, 24, 24, 25, 29, 29, 34, 34, 38, 40.

(ii) ଏକାଧିକବାର ରହିବାର ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ବାରମ୍ବାର ନ ଲେଖି ସେମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟାକୁ **ପୌନଃପୁନ୍ୟ** ବା **ବାରମ୍ବାରତା(Frequency)** ରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ।

ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ପ୍ରସ୍ତୁତ ସାରଣୀକୁ **ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ ବା ପୌନଃପୁନ୍ୟ ବିତରଣ ସାରଣୀ (Frequency distribution table)** କୁହାଯାଏ ।

ସାରଣୀ-2

(ସାରଣୀ-1ରେ ଥିବା ତଥ୍ୟର ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ)

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	ବାରମ୍ବାରତା	ଲବ୍ଧାଙ୍କ	ବାରମ୍ବାରତା	ଲବ୍ଧାଙ୍କ	ବାରମ୍ବାରତା
5	1	17	0	29	2
6	0	18	0	30	0
7	1	19	6	31	0
8	0	20	0	32	0
9	0	21	0	33	0
10	2	22	1	34	2
11	0	23	0	35	0
12	3	24	5	36	0
13	0	25	1	37	0
14	4	26	0	38	1
15	0	27	0	39	0
16	0	28	0	40	1
					30

(i) ସର୍ବନିମ୍ନ ଓ ସର୍ବାଧିକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଦୁଇଟି ନିର୍ଦ୍ଧାରଣ କରାଯାଇଛି ।

(ii) ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କରୁ ସର୍ବାଧିକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଲେଖାଯାଇଛି ।

(iii) ସାରଣୀ-1ର ତଥ୍ୟାବଳୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ସଂଖ୍ୟାକୁ ସେହି ଲବ୍ଧାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ରୂପେ ଲେଖାଯାଇଛି । ସାରଣୀ-1ରେ ଯେଉଁ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ନାହିଁ ତାହାର ବାରମ୍ବାରତାକୁ ଶୂନ ନିଆଯାଇଛି । ଶୂନ ବାରମ୍ବାରତା ବିଶିଷ୍ଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ବାଦ୍ ଦେଇ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସାରଣୀ-3 ପ୍ରସ୍ତୁତ କରାଯାଉଛି ।

ସାରଣୀ-3 (ସାରଣୀ-2ର ଭିନ୍ନ ରୂପ)

ଲବ୍ଧାଙ୍କ (Score)	ବାରମ୍ବାରତା (Frequency)	ଲବ୍ଧାଙ୍କ (Score)	ବାରମ୍ବାରତା (Frequency)
5	1	24	5
7	1	25	1
10	2	29	2
12	3	34	2
14	4	38	1
19	6	40	1
22	1		30

ସାରଣୀ – 2 ବା ସାରଣୀ – 3ରୁ ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀମାନଙ୍କ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର କିପରି ସହଜରେ ମିଳିପାରୁଛି ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

ପ୍ରଶ୍ନ	ଉତ୍ତର
(i) ସର୍ବାଧିକ ନମ୍ବର କେତେ ?	ସର୍ବାଧିକ ନମ୍ବର 40 ଓ ତାହା ଗୋଟିଏ ପିଲା ପାଇଛି ।
(ii) ସର୍ବନିମ୍ନ ନମ୍ବର କେତେ ?	ସର୍ବନିମ୍ନ ନମ୍ବର 5 ତାହା ମଧ୍ୟ ଗୋଟିଏ ପିଲା ପାଇଛି ।
(iii) କେତେ ଛାତ୍ର 50% ବା ତଦୁର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ନମ୍ବର ରଖିଛନ୍ତି ?	7 ଜଣ ଛାତ୍ର 25 ନମ୍ବର (50%) ବା ତା'ଠାରୁ ବେଶି ନମ୍ବର ରଖିଛନ୍ତି ।
(iv) କେତେ ଛାତ୍ର 30%ରୁ କମ୍ ନମ୍ବର ରଖିଛନ୍ତି ?	11 ଜଣ ଛାତ୍ର 30%ରୁ କମ୍ ନମ୍ବର ରଖିଛନ୍ତି ।
(v) କେତେ ଜଣ ଛାତ୍ର 30%ରୁ ଅଧିକ ଓ 40% ରୁ କମ୍ ନମ୍ବର ରଖିଛନ୍ତି ?	6 ଜଣ 30%ରୁ ଅଧିକ ଓ 40%ରୁ କମ୍ ନମ୍ବର ରଖିଛନ୍ତି । (50ର 30% = 15 50ର 40% = 20)
(vi) କେଉଁ ନମ୍ବରର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ ?	19 ର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ ।

ତଥ୍ୟାବଳୀର ଏପ୍ରକାର ଉପସ୍ଥାପନାରୁ ପରୀକ୍ଷାଫଳ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ବିଭିନ୍ନ ତଥ୍ୟ ସହଜରେ ମିଳିଥାଏ ।

7.4.2 ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ (Determination of frequency of the Scores):

ଅନୁମେଳନ ରେଖାଙ୍କନ ଦ୍ୱାରା ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ନିମ୍ନମତେ କରାଯାଏ :

(i) ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କରୁ ସର୍ବାଧିକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ (ବା ସର୍ବାଧିକରୁ ସର୍ବନିମ୍ନ) ମାନଙ୍କର ତାଲିକାଟି ଲେଖାଯାଏ ।

(ii) ତଥ୍ୟାବଳୀ (ସାରଣୀ-1)ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଲାଗି ଲବ୍ଧାଙ୍କ ତାଲିକାରେ ସେହି ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଡାହାଣରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଗାର (/) ସାମାନ୍ୟ ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ଭାବେ ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ସାରଣୀ-1ରେ ପ୍ରଥମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 19 ଲାଗି ଲବ୍ଧାଙ୍କ ତାଲିକାରେ ଥିବା 19ର ଡାହାଣକୁ ତିର୍ଯ୍ୟକ୍ ଗାର (/)ଟିଏ ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ । ଏହି ଗାରକୁ **ଅନୁମେଳନ ରେଖା (ଟାଲି ଚିହ୍ନ - tally mark)** କୁହାଯାଏ । ପରବର୍ତ୍ତୀ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 14 ଲାଗି ଲବ୍ଧାଙ୍କ ତାଲିକାରେ ଥିବା 14 ପାଖରେ ଟାଲି ଚିହ୍ନଟିଏ ଦିଆଯାଏ । ଏହିପରି ସାରଣୀ-1ର ସମସ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଲାଗି ଲବ୍ଧାଙ୍କ ତାଲିକାରେ ଥିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ପାଖରେ ସେମାନଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶ କରୁଥିବା ଟାଲି ଚିହ୍ନ ମାନ ଦିଆଯାଏ । ଅବଶ୍ୟ ଗୋଟିଏ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ପାଖରେ ଚାରୋଟି ଟାଲି ଚିହ୍ନ ଦେଇ ସାରିବା ପରେ ପଞ୍ଚମ ଟାଲି ଚିହ୍ନଟିକୁ ପୂର୍ବରୁ ଅଙ୍କିତ ଟାଲି ଚିହ୍ନ ଚାରୋଟିର ଛେଦକ ରେଖାରୂପେ (ବା ସେମାନଙ୍କ ଉପରେ) ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ ।

ଫଳରେ 5ରୁ ଅଧିକବାର ରହିଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କ ପାଖରେ ଥିବା ଟାଲି ଚିହ୍ନ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରେ ହୋଇଥାଏ ।

5 ଥର ରହିଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କର ଟାଲି ଚିହ୍ନ (~~////~~) ବା ($\overline{////}$)

6 ଥର ରହିଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କର ଟାଲି ଚିହ୍ନ (~~////~~ /) ବା ($\overline{////}$ /)

10 ଥର ରହିଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କର ଟାଲି ଚିହ୍ନ (~~////~~ ~~////~~) ବା ($\overline{////}$ $\overline{////}$)

7.5 ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା (Cumulative frequency) :

ଏକ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କଠାରୁ କୌଣସି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସମସ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ଯୋଗଫଳକୁ ଉକ୍ତ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କର **ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା (Cumulative frequency)** କୁହାଯାଏ । କୌଣସି ଏକ ପ୍ରାଥମିକ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କ ବୟସ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ତଥ୍ୟ ପରବର୍ତ୍ତୀ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ସାରଣୀରୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ପାଇବାକୁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

ସାରଣୀ-4

ବୟସ	6	7	8	9	10	11	12	13
ବାରମ୍ବାରତା	30	32	36	42	38	38	25	18

(i) 7 ବର୍ଷ ବା ତା'ଠାରୁ କମ୍ ବୟସ୍କ ପିଲାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

ଆବଶ୍ୟକ ସଂଖ୍ୟା = 30 + 32 = 62 । (ଏଠାରେ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 7 ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା 62 ।)

(ii) 8 ବର୍ଷ ବା ତା'ଠାରୁ କମ୍ ବୟସର ପିଲାସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

= 30 + 32 + 36 = 98 ।

= 7ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା + 8ର ବାରମ୍ବାରତା

(ଏଠାରେ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 8ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା 98)

(iii) ଉପରୋକ୍ତ ସାରଣୀରେ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 6 ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା କେତେ ?

∵ 6 ଠାରୁ କମ୍ ହୋଇଥିବା କୌଣସି ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଉକ୍ତ ସାରଣୀରେ ନାହିଁ; ତେଣୁ 6 ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା 30

ଉପରୋକ୍ତ ଆଲୋଚନାରୁ ସୁସ୍ପଷ୍ଟ **କୌଣସି ଲବ୍ଧାଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା**

= ତା'ର ଠିକ୍ ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା + ସେହି ଲବ୍ଧାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା

ସାରଣୀ-5

(ସାରଣୀ -4 ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ)

ବୟସ	ବାରମ୍ବାରତା (f)	ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା (c.f.)	ସୂଚନା
6	30	30	= 30 (6 ର ବାରମ୍ବାରତା)
7	32	62	= 30+32 (7 ର ବାରମ୍ବାରତା)
8	36	98	= 62+36 (8 ର ବାରମ୍ବାରତା)
9	42	140	= 98+42 (9 ର ବାରମ୍ବାରତା)
10	38	178	= 140+38 (11 ର ବାରମ୍ବାରତା)
11	38	216	= 178+38 (11 ର ବାରମ୍ବାରତା)
12	25	241	= 216+25 (12 ର ବାରମ୍ବାରତା)
13	18	259	= 241+18 (13 ର ବାରମ୍ବାରତା)

$\Sigma f = 259$

(Σf କୁ ସିଗ୍‌ମା f ବୋଲି ପଢ଼ାଯାଏ ଓ ଏହାର ଅର୍ଥ ସମସ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତାର ସମଷ୍ଟି)

ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଥିବା ସୂଚନା ସ୍ତମ୍ଭଟି ତୁମ ବୁଝିବା ଲାଗି ଦର୍ଶାଇ ଦିଆଯାଇଛି । ତୁମେ ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କଲାବେଳେ ସେ ସ୍ତମ୍ଭଟି ଦର୍ଶାଇବାର ଆବଶ୍ୟକତା ନାହିଁ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଶେଷ ଲବ୍ଧାଙ୍କରେ ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ଓ Σfର ମାନ ସମାନ ହେଲେ ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ଠିକ୍ ଅଛି ବୋଲି ଜଣାଯାଏ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ- 7(a)

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ବାରମ୍ବାରତା	5	8	17	29	41	36	27	16	10

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ଦତ୍ତ ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତାରୁ ସେଗୁଡ଼ିକର ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	1	2	3	4	5	6	7	8
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା	5	13	25	43	56	66	73	77

3. (a) ନିମ୍ନରେ 25 ଜଣ ଲୋକଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା (ସେ.ମି.ରେ) ଲେଖାଯାଇଛି । ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ସଜାଇ ଏକ ପୌନଃପୁନ୍ୟ ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

160, 162, 170, 171,165, 166, 161, 159, 158, 175, 163, 162, 164, 166, 170, 172, 171, 170, 173, 180, 160, 165, 164, 163, 167

(b) ଉପରୋକ୍ତ ସାରଣୀରୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ସର୍ବନିମ୍ନ ଉଚ୍ଚତା କେତେ ?

(ii) ସର୍ବାଧିକ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ଲୋକ ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

(iii) କେଉଁ ଉଚ୍ଚତା ବିଶିଷ୍ଟ ସର୍ବାଧିକ ଲୋକ ଅଛନ୍ତି ?

(iv) କେତେ ଜଣ ଲୋକଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା 180 ସେ.ମି. ରୁ କମ୍ ?

(v) କେତେ ଜଣ ଲୋକଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା 170 ସେ.ମି. ରୁ 180 ସେ.ମି. (ଉଭୟ ଉଚ୍ଚତା ସହ) ମଧ୍ୟରେ ହୋଇଛି ?

4. (a) 30 ଜଣ ପିଲାଙ୍କର ଗଣିତ ପରୀକ୍ଷା ନମ୍ବର ଦିଆଯାଇଛି (ପରୀକ୍ଷାର ମୋଟ ନମ୍ବର 100) । ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ନେଇ ଏକ ପୌନଃପୁନ୍ୟ ବିତରଣ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ।

21, 12, 51, 48, 21, 32, 48, 32, 81, 72, 32, 48, 48, 91, 51, 61, 51, 81, 72, 51, 61, 51, 61, 51, 51, 91, 61, 72, 81, 61

(b) ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିଥିବା ସାରଣୀରୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ଯଦି ପାସ୍ ନମ୍ବର 30 ହୁଏ, ତେବେ କେତେ ଜଣ ପିଲା ପାସ୍ କରିଛନ୍ତି ?

(ii) ଯଦି 81-100 ନମ୍ବରକୁ A ଗ୍ରେଡ୍ ଓ 61-80 ନମ୍ବରକୁ B ଗ୍ରେଡ୍ , 31-60 ନମ୍ବରକୁ C ଗ୍ରେଡ୍, 10-30କୁ D ଗ୍ରେଡ୍ ଓ 10ରୁକମ୍‌କୁ E ଗ୍ରେଡ୍ ଦିଆଯାଏ , ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଗ୍ରେଡ୍ ପାଇଥିବା ପିଲାଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(iii) ପାସ୍ ନମ୍ବର କେତେ ରଖିଲେ 29 ଜଣ ପିଲା ପାସ୍ କରିବେ ?

5. (a) ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱକ୍ରମରେ ସଜାଅ ।

74, 64, 67, 73, 80, 78, 65, 69, 73, 84, 83, 73, 93, 62, 72, 72, 62, 79, 88, 79, 61, 53, 87, 56, 87, 81, 42, 70, 45, 66 ।

(b) ଉପରୋକ୍ତ ବିନ୍ୟାସ (Array) କୁ ଏକ ପୌନଃପୁନ୍ୟ ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

(c) ପ୍ରସ୍ତୁତ ବିତରଣରୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କ କେତେ ?

(ii) ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଲବ୍ଧାଙ୍କ କେତେ ?

(iii) କେଉଁ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ ?

(iv) ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

7.6 ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ (Grouped frequency distribution) :

30 ଜଣ ପିଲାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ -1 ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ହୋଇଛି । ପିଲା ସଂଖ୍ୟା ଯଦି ବହୁତ ବେଶି ହୁଏ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ 50 ନ ହୋଇ 100 ହୁଏ ତାହା ହେଲେ ଏହି ସାରଣୀ ଟି ବହୁତ ବଡ଼ ହୋଇଯିବ । ପରୀକ୍ଷାରେ ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ଯଦି 5,000 ହୁଏ ଏବଂ ପୂର୍ଣ୍ଣାଙ୍କ 300 ହୁଏ ତେବେ ଏପରିସ୍ଥଳେ ସାରଣୀ-1 ର ଅନୁରୂପ ଏକ ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ବିରକ୍ତିକର, ସମୟ ସାପେକ୍ଷ ଓ କଷ୍ଟକର ହେବ । ଏପରି ଏକ ସାରଣୀରୁ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ତଥ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା ମଧ୍ଯ କଷ୍ଟକର ହେବ । ଏପରି ସ୍ଥଳେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ପାଇଁ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ନକରି ଲବ୍ଧାଙ୍କଗୁଡ଼ିକୁ କେତେକ **ଶ୍ରେଣୀ ବା ସଂଭାଗ (class or group)**ରେ ବିଭକ୍ତ କରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗ ପାଇଁ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । ଏହି ପ୍ରକ୍ରିୟାକୁ **ସଂଭାଗୀକରଣ (classification)** କୁହାଯାଏ ।

ନିମ୍ନରେ ଗୋଟିଏ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ନିଆଯାଇଛି ।

20,	35,	48,	17,	63,	28,	52,	12,	64,	73
15,	51,	37,	70,	68,	73,	49,	53,	26,	42
44,	31,	36,	16,	24,	31,	43,	50,	36,	45
23,	74,	53,	62,	19,	52,	46,	53,	66,	32

ସାଧାରଣତଃ ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିସ୍ତାର ଅଧିକ ହୋଇଥିଲେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସଂଭାଗୀକରଣ କରାଯାଏ । ବର୍ତ୍ତମାନ **ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିସ୍ତାର** ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରିବା । **ତଥ୍ୟାବଳୀର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କଦ୍ୱୟ ମଧ୍ୟରେ ଥିବା ଦୂରତ୍ୱକୁ ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିସ୍ତାର କୁହାଯାଏ ।**

ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଏବଂ ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ 74 ଏବଂ 12 । ଯେହେତୁ 74 ଓ 12 ଉଭୟ ତଥ୍ୟ ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିସ୍ତାର = (74 – 12) + 1 = 63.

ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସଂଭାଗୀକରଣ ସାଧାରଣତଃ ନିମ୍ନମତେ କରାଯାଇପାରେ ।

(A) 10-20, 20-30, 30-40, 40-50, 50-60, 60-70, 70-80

(B) 10-19, 20-29, 30-39, 40-49, 50-59, 60-69, 70-79.

ସମସ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ 7ଟି ଭାଗ (class) ରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯାଇଛି । ଏହି ପ୍ରକ୍ରୟାକୁ 'ସଂଭାଗୀକରଣ ' କୁହାଯାଏ ।

ସଂଭାଗୀକରଣ ପ୍ରକ୍ରିୟା ସମ୍ବନ୍ଧରେ କେତେକ ଜାଣିବା କଥା:

1. ସଂଭାଗର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା ଓ ନିମ୍ନସୀମା (Upper limit and Lower limit of the class):

(A) ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ 'ସଂଭାଗୀକରଣ'ରେ ସଂଭାଗଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, 10-20, 20-30, ...

(B) ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ 'ସଂଭାଗୀକରଣ' ରେ ସଂଭାଗ ଗୁଡ଼ିକ ହେଲେ, 10-19, 20-29...............................

ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ଗୋଟିଏ ନିମ୍ନସୀମା ଏବଂ ଗୋଟିଏ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା ଥାଏ ।

ଯଥା : 10-20 ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା (lower limit) = 10 ଏବଂ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା (upper limit) = 20

ସେହିପରି 20-29 ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା =20 ଏବଂ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା=29

2. ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ (Mid -point of the class) :

କୌଣସି ସଂଭାଗର ନିମ୍ନ ଓ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମାଦ୍ୱୟ ଯଥାକ୍ରମେ l_1 ଓ l_2 ହେଲେ, ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ= $\frac{l_1 + l_2}{2}$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, (10-20) ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ = $\frac{10+20}{2}$ = 15

3. ସଂଭାଗର ବିସ୍ତାର (Size of the class or class interval) :

ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗ ଏହା ନିମ୍ନସୀମାଠାରୁ ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିସ୍ତୃତ । ଏହି ବିସ୍ତୃତିକୁ ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର କୁହାଯାଏ ।

(i) ଯଦି କ୍ରମରେ ଥିବା ଦୁଇଟି ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ m_1 ଓ m_2 ହୋଇଥାଏ, ତେବେ ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର $m_2 - m_1$ ହେବ ।

ଅନ୍ୟ ଏକ ପ୍ରକାରରେ ମଧ୍ୟ ଆମେ ସଂଭାଗର ବିସ୍ତାର ନିରୂପଣ କରି ପାରିବା ।

(ii) ଅନ୍ୟ ପ୍ରକାରରେ (A) ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ସଂଭାଗୀକରଣରେ ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର = ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା – ନିମ୍ନସୀମା

ଏବଂ (B)ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ସଂଭାଗୀକରଣର ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର=(ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା–ନିମ୍ନସୀମା)+1

7.6.1 ତଥ୍ୟାବଳୀର ସଂଭାଗୀକରଣ :

ସଂଭାଗୀକରଣ ନିମିତ୍ତ ନିମ୍ନ କେତୋଟି କଥା ଉପରେ ନଜର ଦେବା ଆବଶ୍ୟକ ।

(a) ପ୍ରଥମ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମାକୁ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସଂଗେ ସମାନ ବା ତା'ଠାରୁ କିଛି କମ୍ ନିଆଯାଏ । ସେହିପରି ସର୍ବୋଚ୍ଚ ସଂଭାଗର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମାକୁ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସହ ସମାନ ବା ତା'ଠାରୁ ସାମାନ୍ୟ ଅଧିକ ନିଆଯାଏ ।

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟକର-

(i) ପ୍ରଥମ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା 10, ଯେତେବେଳେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 12

(ii) ଶେଷ ସଂଭାଗର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା 80 ବା 79 ଯେତେବେଳେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 74

(b) ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ କେତୋଟି ଶ୍ରେଣୀ ବା ସଂଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କରାଯିବ, ସେଥିନିମନ୍ତେ କୌଣସି ଧରାବନ୍ଧା ନିୟମ ନାହିଁ । ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିସ୍ତାରକୁ ଦୃଷ୍ଟିରେ ରଖି ଏହା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ । ତେବେ ସଂଭାଗ 5 ରୁ 15ମଧ୍ୟରେ ସୀମିତ ରଖିବା ଭଲ ।

(c) ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର ସାଧାରଣତଃ ସୁବିଧା ଲାଗି 5, 10 ବା 20 ନିଆଯାଇଥାଏ ।

(d) ସଂଭାଗୀକରଣର ପ୍ରକାରଭେଦ :

(i) A ରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ସଂଭାଗୀକରଣରେ ପ୍ରଥମ ସଂଭାଗର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା ତଥା ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା ପ୍ରତ୍ୟେକ 20 । ଏଠାରେ 20କୁ ପ୍ରକୃତରେ ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଭାଗର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ବୋଲି ଧରାଯାଏ । ପ୍ରଥମ ସଂଭାଗ "10-20"ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି ଏହି ସଂଭାଗର 10ରୁ ଆରମ୍ଭ ହୋଇ 20 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ (ମାତ୍ର 20 ବ୍ୟତୀତ) ବିସ୍ତୃତ । ଏହାକୁ **ବହିର୍ଭୁକ୍ତ ସଂଭାଗୀକରଣ (Exclusive classification)** କୁହାଯାଏ ।

(ii) Bରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ସଂଭାଗୀକରଣରେ ପ୍ରଥମ ସଂଭାଗର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା 19 ଯାହାକି ଦ୍ୱିତୀୟ ସଂଭାଗର ନିମ୍ନସୀମା ସହ ସମାନ ନୁହେଁ । ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ସଂଭାଗ '10-19' ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି ଏହି ସଂଭାଗ 10ରୁ ଆରମ୍ଭ ହୋଇ 19 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିସ୍ତୃତ । ଏହାକୁ **ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସଂଭାଗୀ କରଣ (Inclusive classification)** କୁହାଯାଏ ।

7.6.2. ଭାଗବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ (Grouped frequency distribution) :

ଭାଗବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ବା ପୌନଃପୁନ୍ୟ ନିର୍ଦ୍ଦେଶିତ ହୁଏ । ପ୍ରଥମେ ଏକ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା କ'ଣ ବୁଝିବା ଆବଶ୍ୟକ, ଗୋଟିଏ ସଂଭାଗ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ମାନଙ୍କର

ମୋଟ ସଂଖ୍ୟା ହିଁ ଉକ୍ତ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା । ଯଥା,

ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀରେ ଥିବା ତଥ୍ୟ ସମୂହକୁ ନେଇ ପ୍ରଥମ (A) ପ୍ରଣାଳୀ ଦ୍ୱାରା ସଂଭାଗୀକରଣ କଲେ-

ସଂଭାଗ 10–20 ର ବାରମ୍ବାରତା = 5 ଅର୍ଥାତ୍ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 10 ରୁ 20 ମଧ୍ୟରେ (20 ବ୍ୟତୀତ) ଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = 5

ଗ୍ରହଣ କରିଥିବା ସଂଭାଗମାନଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବାର ପ୍ରଣାଳୀଗୁଡ଼ିକୁ ନିମ୍ନରେ ଦେଖ ।

(i) ପ୍ରଥମେ (A) ଅଥବା (B) କୌଣସି ଗୋଟିଏ ପ୍ରଣାଳୀର ସଂଭାଗଗୁଡ଼ିକୁ ଗୋଟିଏ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଲେଖ ।

(ii) ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ଦେଖି ଏହାର ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଲାଗି ତାହା ଯେଉଁ ସଂଭାଗର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତାହାର ଡାହାଣରେ ଚିହ୍ନ ଦିଅ ।

(iii) ତଥ୍ୟାବଳୀର ସମସ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଲାଗି ଟାଲି ଚିହ୍ନ ଦେଇ ସାରିବା ପରେ ସେଗୁଡ଼ିକୁ ଗଣି ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ଲେଖ ।

ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ କିପରି ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀରେ ପରିଣତ କରାଯାଇଛି ତାହା ସାରଣୀ-6 ରେ ଦେଖ । (ସଂଭାଗୀକରଣ - A ପ୍ରଣାଳୀ)

ସାରଣୀ-6

ସଂଭାଗ	ଟାଲିଚିହ୍ନ	ବାରମ୍ବାରତା (f)
10-20	////	5
20-30	////	5
30-40	//// //	7
40-50	//// //	7
50-60	//// //	7
60-70	////	5
70-80	////	4

$\Sigma f = 40$

ସଂଭାଗୀକରଣ (A) ପ୍ରଣାଳୀ ପରିବର୍ତ୍ତେ (B) ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନ କରିଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଟାଲିଚିହ୍ନ ସଂଖ୍ୟା ତଥା ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତାରେ କିଛି ପରିବର୍ତ୍ତନ ହୋଇ ନ ଥାନ୍ତା । ନିମ୍ନରେ ବାରମ୍ବାରତା ବଣ୍ଟନ ସାରଣୀଟି ଦିଆଗଲା । ସାରଣୀ-7 ଦେଖ ।

ସାରଣୀ-7

ସଂଭାଗ	ଟାଲିଚିହ୍ନ	ବାରମ୍ବାରତା (f)
10-19	////	5
20-29	////	5
30-39	//// //	7
40-49	//// //	7
50-59	//// //	7
60-69	////	5
70-79	////	4

$\Sigma f = 40$

ଟୀକା : (1) Σf ସର୍ବଦା ମୋଟ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ସଙ୍ଗେ ସମାନ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ । ନହେଲେ ଟାଲିଚିହ୍ନ ଦେବା ବା ଟାଲିଚିହ୍ନକୁ ଗଣି ବାରମ୍ବାରତା ଲେଖିବା ପ୍ରଣାଳୀରେ କିଛି ତ୍ରୁଟି ଅଛି ବୋଲି ବୁଝିବାକୁ ହେବ ।

(2) ଯେକୌଣସି ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀର ପ୍ରକାଶ କଲେ ସାଧାରଣତଃ ଦେଖିବା ଯେ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ଲବ୍ଧାଙ୍କଠାରୁ ମଧ୍ୟଭାଗ ଆଡ଼କୁ ବାରମ୍ବାରତା କ୍ରମଶଃ ବୃଦ୍ଧିପାଏ ଓ ମଧ୍ୟଭାଗରୁ ବୃହତ୍ତମ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଆଡ଼କୁ ବାରମ୍ବାରତା କ୍ରମଶଃ ହ୍ରାସପାଏ । ଯଦି ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣରେ ବ୍ୟତିକ୍ରମ ହୋଇଥାଏ କୌଣସି ଏକ ଅସ୍ୱାଭାବିକ ପରିସ୍ଥିତିର ସୂଚନା ଦିଏ ।

7.7 ଭାଗବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀରେ ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା :

ଏଠାରେ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ସାରଣୀରେ ଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ ପ୍ରଣାଳୀ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଉଛି । ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀକୁ ଦେଖ ।

ସାରଣୀ -8

ସଂଭାଗ	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30
ବାରମ୍ବାରତା	18	22	27	25	20	16

ଉପରିସ୍ଥ ସାରଣୀର 0—5 ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା =18, ଏଥିରୁ ଆମେ କ'ଣ ଜାଣିଲେ ?

(0–5) ସଂଭାଗର ଲବ୍ଧାଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା (ଅର୍ଥାତ୍ ସମସ୍ତ ଲବ୍ଧାଙ୍କର ବାରମ୍ବାରତାର ସମଷ୍ଟି) ହେଉଛି 18,

5 ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା = 18

ସେହିପରି,

10ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା = (0—5)ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା + (5—10) ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା
= 18 + 22 = 40

15ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା = 10 ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା + (10—15) ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା
= 40 + 27 = 67

ପୂର୍ବପରି ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ସଂଭାଗର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା, ଅର୍ଥାତ୍ 20, 25, 30 ଆଦି ଲବ୍ଧାଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ହେବ ।

ମନେରଖ : ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ଊର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମାର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତାକୁ ସେହି ସଂଭାଗର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା କୁହାଯାଏ ।

ସାରଣୀ-9

(ସାରଣୀ-8 ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସଂଭାଗମାନଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ)

ସଂଭାଗ	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30
ବାରମ୍ବାରତା	18	22	27	25	20	16
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା	18	40	67	92	112	128

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7(b)

1. ଗୋଟିଏ ସାଇକେଲ୍ ଦୋକାନରେ ମାସକର ବିଭିନ୍ନ ଦିନମାନଙ୍କରେ ବିକ୍ରି ହୋଇଥିବା ସାଇକେଲ୍ ସଂଖ୍ୟା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

18, 32, 30, 23, 11, 8, 24, 15, 27, 29, 32, 22, 13, 17, 21,
10, 28, 30, 15, 12, 26, 31, 22, 19, 14, 17, 15, 21, 18, 23.

(a) ଉପରେ ଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଓ ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କ କେତେ ?

(b) ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟବଳୀର ବିସ୍ତାର କେତେ ?

(c) 5—9, 10—14 ଆଦି ସଂଭାଗମାନ (ସମାନ ସଂଭାଗ-ବିସ୍ତାର ବିଶିଷ୍ଟ) ନେଇ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ପୌନଃପୁନ୍ୟ ବିତରଣୀ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ।

(d) ଉପରୋକ୍ତ ସଂଭାଗମାନଙ୍କର ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର କେତେ ?

(e) କେଉଁ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ ?

(f) କେଉଁ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବନିମ୍ନ ?

(g) 5—10, 10—15 ଆଦି ସଂଭାଗ (ସମାନ ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର ବିଶିଷ୍ଟ) ନେଇ ପୌନଃପୁନ୍ୟ ବିତରଣ ସାରଣୀ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ।

2. 50ଟି ନଡ଼ିଆ ଗଛଥିବା ବଗିଚାରେ ଗଛମାନଙ୍କରୁ ବର୍ଷ ମଧ୍ୟରେ ତୋଳାଯାଇଥିବା ନଡ଼ିଆ ସଂଖ୍ୟା ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

192, 160, 120, 135, 210, 222, 190, 138, 157, 216,
154, 188, 205, 208, 175, 145, 168, 127, 161, 132,
180, 200, 172, 125, 133, 147, 152, 209, 212, 216,
146, 173, 227, 136, 185, 140, 189, 130, 188, 150,
210, 170, 183, 190, 220, 164, 200, 128, 193, 171.

(a) ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀରୁ ସର୍ବନିମ୍ନ ଓ ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(b) ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିସ୍ତାର କେତେ ?

(c) 120—130, 130—140 ଇତ୍ୟାଦି ସଂଭାଗମାନ ନେଇ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ପୌନଃପୁନ୍ୟ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶ କର।

(d) ଉପରୋକ୍ତ ସଂଭାଗୀକରଣରେ ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର କେତେ ?

(e) ଲବ୍ଧାଙ୍କ 150 କେଉଁ ସଂଭାଗର ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ହେବ ?

(f) କେଉଁ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବାଧିକ ?

(g) କେଉଁ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ସର୍ବନିମ୍ନ ?

3. ଯେଉଁ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀର ସଂଭାଗମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁମାନ ହେଲା 25, 35, 45, 55, 65, 75 ଓ 85 ସେହି ସାରଣୀସ୍ଥ ସଂଭାଗ-ବିସ୍ତାର ଓ ସଂଭାଗ-ସୀମାମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4. ନିମ୍ନ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ସଂଭାଗମାନଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ଲମ୍ବାଙ୍କ 39 ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା କେତେ ସ୍ଥିର କର ।

ସଂଭାଗ	0—9	10—19	20—29	30—39	40—49
ବାରମ୍ବାରତା	8	13	21	15	6

5. (a) ନିମ୍ନସ୍ଥ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ 0–9, 10–19, 20–29 ଆଦି ସଂଭାଗ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ପୌନଃପୁନ୍ୟ ବିତରଣ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶ କର ଓ ତତ୍ପରେ ସଂଭାଗମାନଙ୍କର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ଲେଖ ।

25, 32, 38, 52, 32, 11, 5, 8, 18, 37, 35, 42,
68, 35, 42, 52, 2, 18, 7, 22, 30, 41, 56, 64,
31, 27, 32, 41, 28, 7, 53, 41, 46, 58, 12, 25,
64, 45, 39, 40

(b) ଲମ୍ବାଙ୍କ 39 ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା କେତେ ?

(c) କେଉଁ ସଂଭାଗର ବାରମ୍ବାରତା ବୃହତ୍ତମ ?

(d) କେଉଁ ସଂଭାଗର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ବୃହତ୍ତମ ?

6. 200 ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କର କୌଣସି ଏକ ପରୀକ୍ଷାର ଶତକଡ଼ାରେ ପ୍ରକାଶିତ ଫଳାଫଳ ସହ ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ପରୀକ୍ଷା ନମ୍ବର (ଶତକଡ଼ାରେ) :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା :	5	12	27	46	102	135	160	181	196	200

ସାରଣୀଟି ଦେଖି ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ଦିଅ ।

(i) ପାସ୍ ନମ୍ବର ଶତକଡ଼ା 30 ହୋଇଥିଲେ କେତେ ଛାତ୍ର ଫେଲ୍ ହୋଇଛନ୍ତି ?

(ii) ଶତକଡ଼ା 60 ବା ତଦୂର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ନମ୍ବର ରଖିଥିଲେ ପରୀକ୍ଷାରେ ପ୍ରଥମ ଶ୍ରେଣୀ ମିଳିଥାଏ । ତେବେ ଉପରୋକ୍ତ ପରୀକ୍ଷାରେ କେତେ ଛାତ୍ର ପ୍ରଥମ ଶ୍ରେଣୀରେ ପାସ୍ କରିଛନ୍ତି ?

(iii) 40% ବା ତହିଁରୁ ଅଧିକ ମାତ୍ର 60%ରୁ କମ୍ ନମ୍ବର ରଖିଥିବା ଛାତ୍ର ସଂଖ୍ୟା କେତେ ?

(iv) ଶତକଡ଼ା 80 ବା ତଦୂର୍ଦ୍ଧ୍ୱ ନମ୍ବର ରଖିଥିବା ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀଙ୍କୁ ବୃତ୍ତି ମିଳିବାର ବ୍ୟବସ୍ଥା ଥିଲେ ଉପରୋକ୍ତ ପରୀକ୍ଷାରେ କେତେ ପରୀକ୍ଷାର୍ଥୀ ବୃତ୍ତି ପାଇବା ଲାଗି ବିବେଚିତ ହେବେ ?

7.8 ତଥ୍ୟାବଳୀର ଲୈଖିକ ପରିପ୍ରକାଶ (Graphical representation of data) :

ସାଂଖ୍ୟିକ ତଥ୍ୟାବଳୀର ସଂଗ୍ରହ ଏବଂ ଏହାର ସଜ୍ଜିକରଣ ଅର୍ଥାତ୍ ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ ସାରଣୀ ମାଧ୍ୟମରେ ଏହାର ଉପସ୍ଥାପନ ବିଷୟରେ ଜାଣିଲ । କିନ୍ତୁ ତଥ୍ୟକୁ ପଢି ସେ ବିଷୟରେ ହୃଦୟଙ୍ଗମ କରିବାର କ୍ଷମତା ଥିଲେ ମଧ୍ୟ ଅନେକ ସମୟରେ ଆମମାନଙ୍କର ସମୟ ଅଥବା ଧୈର୍ଯ୍ୟ ନ ଥାଇ ପାରେ । ମାତ୍ର ଗ୍ରାଫ୍, ଚାଟ୍ ବା ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶିତ ତଥ୍ୟ ସହଜରେ ଆମମାନଙ୍କର ଦୃଷ୍ଟି ଆକର୍ଷଣ କରିବା ସଙ୍ଗେ ସଙ୍ଗେ ଆମ ମନରେ ତଥ୍ୟ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସ୍ୱଷ୍ଟ ଧାରଣା ସୃଷ୍ଟି କରେ । ଆହୁରି ମଧ୍ୟ ଗ୍ରାଫ୍, ଚାର୍ଟ ବା ଚିତ୍ର ଆଦି ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରଦର୍ଶିତ ବହୁ ତଥ୍ୟକୁ ଖୁବ୍ କମ୍ ସମୟ ମଧ୍ୟରେ ଦେଖି ପାରିବା ସମ୍ଭବ

ହୁଏ । ଏଣୁ ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ ସାରଣୀ (ବାରମ୍ବାରତା ବିତରଣ)ରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ଭଳି ସେଗୁଡ଼ିକର ଲୈଖିକ ପରିପ୍ରକାଶ (ଗ୍ରାଫ୍, ଚାର୍ଟ୍ ବା ଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ) ମଧ୍ୟ ପରିସଂଖ୍ୟାନର ଏକ ଗୁରୁତ୍ୱପୂର୍ଣ୍ଣ ପର୍ଯ୍ୟାୟ ।

ତଥ୍ୟାବଳୀର ବିଭିନ୍ନ ଲୈଖିକ ପରିପ୍ରକାଶ ହେଲା :-

(i) **ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର (Frequency polygon)** (ii) **ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ (Histogram)**

(iii) **ବୃତ୍ତ ଲେଖ (Pie Chart)** (iv) **ଛବି ଲେଖ (Pictograph)**

ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ଶ୍ରେଣୀମାନଙ୍କରେ ତୁମେ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଉପସ୍ଥାପନାର ଲୈଖିକ ପରିପ୍ରକାଶ ସମ୍ବନ୍ଧରେ କିଛି ଜାଣିଛ । ଏହି ଶ୍ରେଣୀରେ ତତ୍ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ସବିଶେଷ ଆଲୋଚନା କରାଯିବ ।

7.8.1 ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର :

ଭାଗ-ବିଭକ୍ତ ନ ହୋଇଥିବା ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶିତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର (ବା ପୌନଃପୁନ୍ୟ ରେଖାଚିତ୍ର) ଅଙ୍କନ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ପ୍ରଥମେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଉ।

ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର ଅଙ୍କନର ଏକ ଉଦାହରଣ :

ନିମ୍ନରେ ଏକ ପ୍ରାଥମିକ ବିଦ୍ୟାଳୟର ଛାତ୍ରଛାତ୍ରୀମାନଙ୍କର ବୟସକୁ ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀ (ସାରଣୀ–10) ରେ ଦିଆଯାଇଛି।

ସେହି ତଥ୍ୟାବଳୀର ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା।

ସାରଣୀ 10

ବୟସ	5	6	7	8	9	10	11	12
ବାରମ୍ବାରତା	18	24	37	42	58	50	33	22

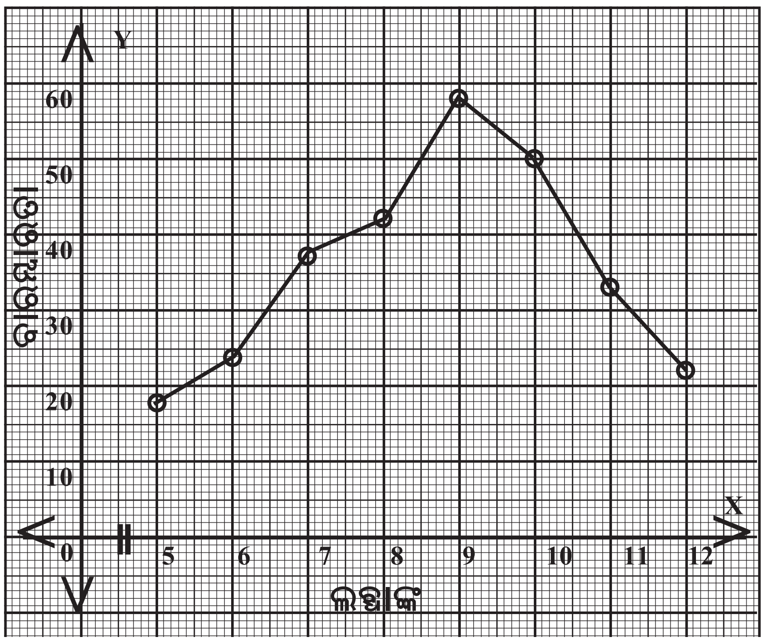
ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀ :

ପ୍ରଥମ ସୋପାନ :

ଖଣ୍ଡେ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ଏକ ଆନୁଭୂମିକ ଅକ୍ଷରେଖା (x-axis), ଅନ୍ୟ ଏକ ଅଭିଲମ୍ବୀୟ ଅକ୍ଷରେଖା (y-axis) ଅଙ୍କନ କର ଓ ଉପଯୁକ୍ତ ସ୍କେଲ୍ ନେଇ x- ଅକ୍ଷରେ 0 ରୁ 15 ଓ y- ଅକ୍ଷରେ 0 ରୁ 60 ଏକକ ଦର୍ଶାଅ।

ସ୍କେଲ୍ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ସୂଚନା :

ସ୍କେଲ୍ ଏପରି ହେବା ଉଚିତ୍ ଯେପରି ଚିତ୍ରଟି ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜର ଅଧିକାଂଶ ଅଂଶ ଅଧିକାର କରିବ।



(ଚିତ୍ର 7.1)

ଦ୍ୱିତୀୟ ସୋପାନ:

ସାରଣୀକୁ ଦେଖି ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୟସ ଓ ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ x ଓ y ସ୍ଥାନାଙ୍କ ରୂପେ ନେଇ ବିନ୍ଦୁମାନ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ କର, ଯଥା– ପ୍ରଥମ ବିନ୍ଦୁର x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 5 ଏକକ (ବୟସ) ଓ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ 18 ଏକକ (ବାରମ୍ବାରତା)

ଏହିପରି ଆଠଟି ବିନ୍ଦୁ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ମିଳିବ।

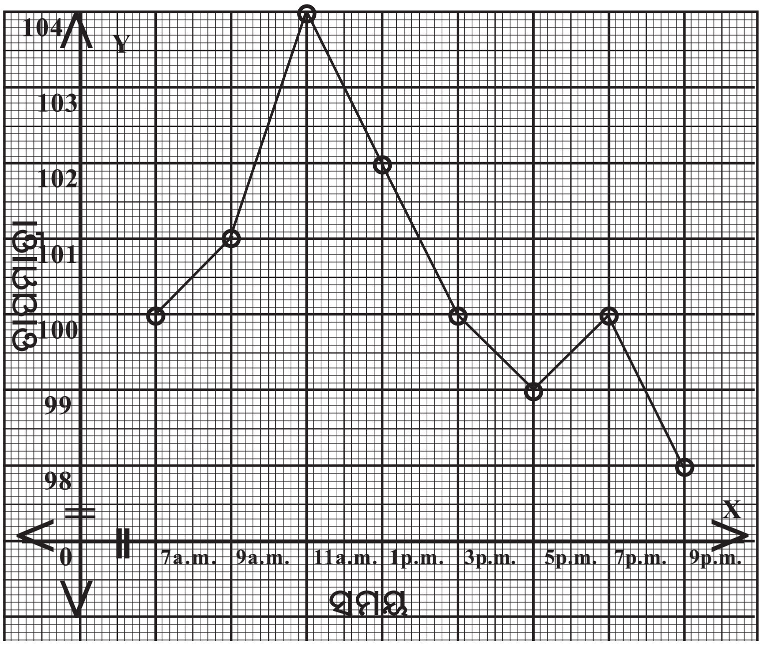
ତୃତୀୟ ସୋପାନ :

ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସଂଯୋଗ କର। ଯେଉଁ ଚିତ୍ରଟି ପାଇଲ ତାହା ସାରଣୀ–10ର ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର।

ଉଦାହରଣ-1

ଗୋଟିଏ ଟାଇଫଏଡ୍ ଜ୍ୱରରେ ପୀଡ଼ିତ ରୋଗୀର ଦିନର ବିଭିନ୍ନ ସମୟରେ ଉପଲବ୍ଧ ତାପମାତ୍ରାକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି। ସମୟ-ତାପମାତ୍ରା ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର।

ସମୟ	7a.m.	9 a.m.	11 a.m.	1 p.m.	3 p.m.	5p.m.	7p.m.	9p.m.
ତାପମାତ୍ରା (θ^0Fରେ)	100	101	104	102	100	99	100	98



(ଚିତ୍ର 7.2)

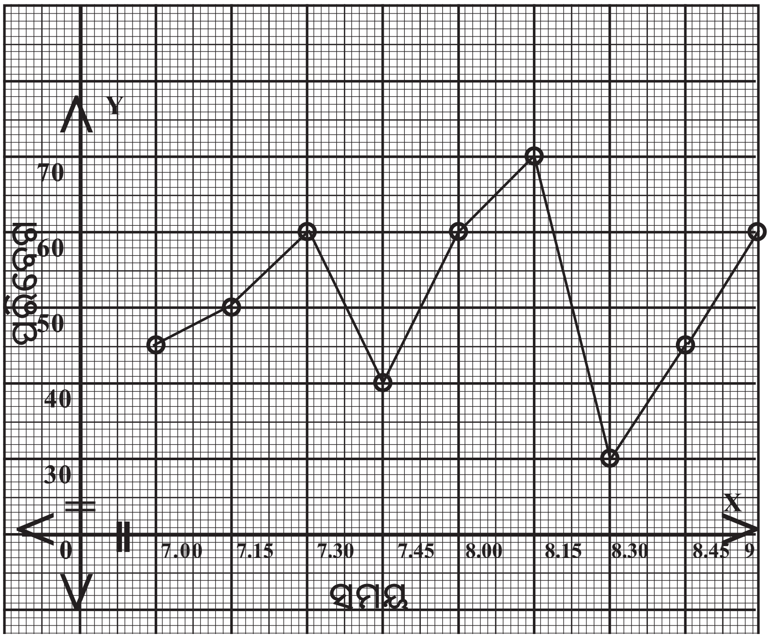
x-ଅକ୍ଷରେ ସମୟ ଏବଂ y-ଅକ୍ଷରେ ତାପମାତ୍ରାକୁ ନିଆଯାଇଛି, ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ରମିତ ଯୋଡ଼ି ମାନଙ୍କୁ ନେଇ ପ୍ରତ୍ୟେକକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ରେଖାଖଣ୍ଡ ଦ୍ୱାରା ଯୋଗକରି ଏହି ଲେଖଚିତ୍ର ପାଇପାରିବ।

(7,100), (9,101).....(9,98)

ଉଦାହରଣ-2 :

ଏକ ଦିନରେ ଗୋଟିଏ କାର୍‌ର ପରିବେଗ (velocity) ବିଭିନ୍ନ ସମୟରେ ଯାହାଥିଲା, ସେ ସମସ୍ତକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ଆଧାର କରି ଗୋଟିଏ ପରିବେଗ-ସମୟ (velocity-time)ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

ସମୟ (time)	7.00	7.15	7.30	7.45	8.00	8.15	8.30	8.45	9.00
ପରିବେଗ (velocity in km/hr.)	45	50	60	40	60	70	30	45	60



(ଚିତ୍ର 7.3)

(ସମୟ, ପରିବେଗ)କ୍ରମିତଯୋଡ଼ିମାନଙ୍କୁ ନେଇ ଲେଖଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଛି ।

7.8.2 ଭାଗ-ବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀର ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର :

ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀ–11 ଓ ସାରଣୀ– 12 କୁ ଲକ୍ଷ୍ୟକର।

ସାରଣୀ - 11

ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ	ବାରମ୍ବାରତା
5	12
6	18
7	32
8	23
9	16
10	9

ସାରଣୀ– 12

ସଂଭାଗ	ବାରମ୍ବାରତା
0-5	3
5-10	8
10-15	12
15-20	17
20-25	11
25-30	6

ସାରଣୀ - 11 ରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ ଲାଗି ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ଦର୍ଶାଯାଇଥିବା ସ୍ଥଳେ ସାରଣୀ– 12ରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗ ଲାଗି ସମ୍ପୃକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ଦର୍ଶାଯାଇଛି।

ସାରଣୀ– 12 ର ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗକୁ ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇପାରିଲେ ଏହା ସାରଣୀ–11 ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇଯିବ। ଫଳରେ ସାରଣୀ– 11 ଲାଗି ଶିଖିଥିବା ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନ କରି ସାରଣୀ– 12 ର ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର ମଧ୍ୟ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇ ପାରିବ। କୌଣସି ସଂଭାଗକୁ ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟାରେ ପ୍ରକାଶ କରିବା ପ୍ରଣାଳୀ ଦେଖ।

ସଂଭାଗ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ : କୌଣସି ସଂଭାଗର ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱସୀମା (Upper linit) l_1 ଓ ନିମ୍ନସୀମା (Lower limit) l_2 ଦ୍ୱୟର ହାରାହାରିକୁ ଉକ୍ତ ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ (Mid-point ବା mid-value) କୁହାଯାଏ।

ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ= $\frac{l_1 + l_2}{2}$

ଏହି ପ୍ରଣାଳୀରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ। ଉଦାହରଣଟି ଦେଖ।

ସାରଣୀ 13

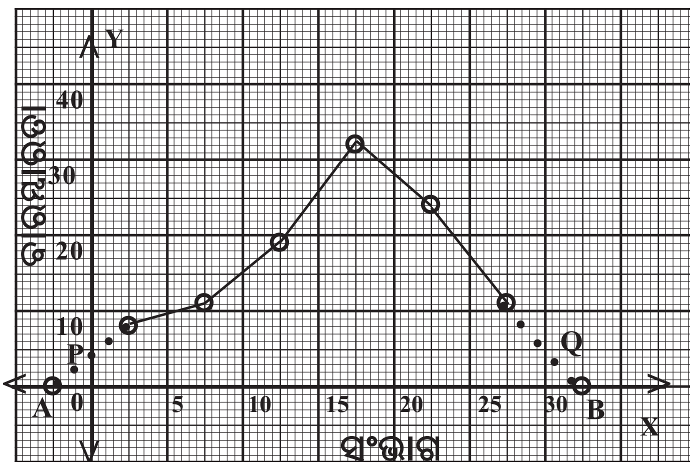
ସଂଭାଗ	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
ବାରମ୍ବାରତା	8	11	19	32	24	11

ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ଲାଗି ପ୍ରସ୍ତୁତ ସାରଣୀ:

ସଂଭାଗ	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5
ବାରମ୍ବାରତା	8	11	19	32	24	11

ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ ପ୍ରଣାଳୀ :

ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ନିଆଯାଇଥିବା x- ଅକ୍ଷରେ ଉପଯୁକ୍ତ ସ୍କେଲ୍ ସାହାଯ୍ୟରେ 0 ଠାରୁ 30 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଲବ୍‌ଧାଙ୍କ ମାନ ଦର୍ଶାଇ ପ୍ରତ୍ୟେକ ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ନିର୍ଦ୍ଦେଶ କରାଯିବ। y- ଅକ୍ଷରେ 0 ଠାରୁ 40 ଏକକ ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶ କଲାପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ ଓ ତାହାର ବାରମ୍ବାରତାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ x- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ଓ y- ସ୍ଥାନାଙ୍କ ରୂପେ ନେଇ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ବିନ୍ଦୁମାନ ଚିହ୍ନଟ କରାଯିବ ଓ ସେହି ବିନ୍ଦୁମାନଙ୍କୁ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ରେଖାଖଣ୍ଡମାନଙ୍କଦ୍ୱାରା ଯୋଗ କରାଯାଇ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରାଯିବ।



(ଚିତ୍ର 7.4)

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ରେଖାଚିତ୍ରଟି ପ୍ରଥମେ ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ 2.5 ଠାରୁ ଶେଷ ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ 27.5 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିସ୍ତୃତ ହେଲା। ମାତ୍ର ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନେ 0 ଠାରୁ 30 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିସ୍ତୃତ । ଏଣୁ ରେଖାଚିତ୍ର ମଧ୍ୟ 0 ରୁ 30 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିସ୍ତୃତ ହେବା ବିଧେୟ। ଏଣୁ ପ୍ରଥମ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ପୂର୍ବବର୍ତ୍ତୀ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କଳ୍ପନା କରାଯାଇ ତାହାର ବାରମ୍ବାରତା 0 ନିଆଯାଇଛି ଓ ସେହିପରି ଶେଷ ସଂଭାଗର ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁର ପରବର୍ତ୍ତୀ ମଧ୍ୟବିନ୍ଦୁ କଳ୍ପନା କରାଯାଇ ତାହାର ବାରମ୍ବାରତା 0 ନିଆଯାଇଛି । ଫଳରେ A ଓ B ଦୁଇଟି କାଳ୍ପନିକ ବିନ୍ଦୁ ଗ୍ରାଫ୍ କାଗଜରେ ନିଆଗଲା । ରେଖାଚିତ୍ରକୁ ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱରେ A ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଓ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ B ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିସ୍ତୃତ କରାଯାଇଛି। ଦତ୍ତ ସାରଣୀ ସମ୍ପୃକ୍ତ ରେଖାଚିତ୍ରଟି P ଠାରୁ Q ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ବିସ୍ତୃତ। A ଓ B ବିନ୍ଦୁ ଆମକୁ ରେଖାଚିତ୍ରର ପ୍ରାନ୍ତ ବିନ୍ଦୁ P ଓ Q କୁ ପାଇବାରେ ସାହାଯ୍ୟ କରନ୍ତି।

ଅନୁଶୀଳନୀ – 7(c)

1. ଦିନର ବିଭିନ୍ନ ସମୟରେ ଜଣେ ରୋଗୀର ତାପମାତ୍ରା ଫାରେନ୍‌ହାଇଟ୍ ଏକକରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଇ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଲେଖାଯାଇଅଛି। ଉକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଏକ ରେଖାଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର।

ସମୟ	8.00 a.m.	10.00a.m.	12.00Noon	2.00p.m.	4.00p.m.	6.00 p.m.	8.00 p.m.
ଫାରେନ୍‌ହାଇଟ୍‌ରେ ତାପମାତ୍ରା	100.4^0	102.4^0	103.6^0	104.0^0	102.8^0	102.0^0	100.8^0

ଅଙ୍କିତ ରେଖାଚିତ୍ରରୁ ନିମ୍ନସ୍ଥ ପ୍ରଶ୍ନମାନଙ୍କର ଉତ୍ତର ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର।

(i) ଅପରାହ୍ନ 3.00 ଘଣ୍ଟା ସମୟରେ ରୋଗୀର ତାପମାତ୍ରା କେତେ ଥିଲା ?

(ii) କେଉଁ ସମୟରେ ରୋଗୀର ତାପମାତ୍ରା 103^0 ଫାଇନ୍‌ହାଇଟ୍ ଥିଲା ?

2. ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଥିବା ତଥ୍ୟାବଳୀକୁ (Time-Temperature) ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ସମୟ (in hrs.)	8a.m.	10 a.m.	12noon	2p.m.	4p.m.	6p.m.	8p.m.
ତାପମାତ୍ରା (in ^{0}F)	100	101	104	103	99	88	100

3. ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଉପସ୍ଥାପନା, ଲେଖଚିତ୍ର ମାଧ୍ୟମରେ ପ୍ରକାଶ କର । (Velocity-time)

ସମୟ (in hr.)	7a.m.	8a.m.	9a.m.	10a.m.	11a.m.	12noon	1p.m.	2p.m.
ପରିବେଗ (in k.m./hr.)	30	45	60	50	70	50	40	45

4. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଥିବା ତଥ୍ୟାବଳୀର ଏକ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	0—5	5—10	10—15	15—20	20—25	25—30
ବାରମ୍ବାରତା	8	13	22	30	24	12

5. 130 ଜଣ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କର ଉଚ୍ଚତା ସେ.ମି. ମାପରେ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଏହି ତଥ୍ୟର ପୌନଃପୁନ୍ୟ ରେଖାଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

ଉଚ୍ଚତା(ସେ.ମି.ରେ)	145–155	155–165	165–175	175-185	185-195	195–205
ବାରମ୍ବାରତା	3	35	48	32	10	2

6. ଗୋଟିଏ ବସ୍ତିରେ ଥିବା 205 ଜଣ ବାସିନ୍ଦାଙ୍କର ମାସିକ ଖର୍ଚ୍ଚ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ଏହି ତଥ୍ୟର ପୌନଃପୁନ୍ୟ ରେଖାଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କର ।

ମାସିକ ଖର୍ଚ୍ଚ	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350	350-400	400-450	450-500
ବାରମ୍ବାରତା	25	33	40	31	30	22	16	3

7.8.3. ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ (Histogram):

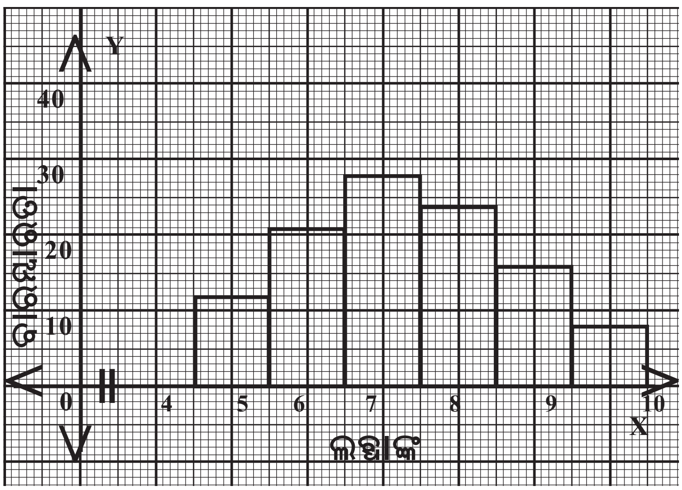
ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀରେ ଥିବା ଲବ୍ଧାଙ୍କର ବିସ୍ତାରକୁ ଆନୁଭୂମିକ ବାହୁ ଓ ଏହାର ବାରମ୍ବାରତାକୁ ଉଲ୍ଲମ୍ବ ବାହୁ ରୂପେ ନେଇ ଆୟତଚିତ୍ରମାନ ଅଙ୍କନ କରି ନିମ୍ନମତେ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କନ କରାଯାଇପାରେ ।

ସାରଣୀ–14

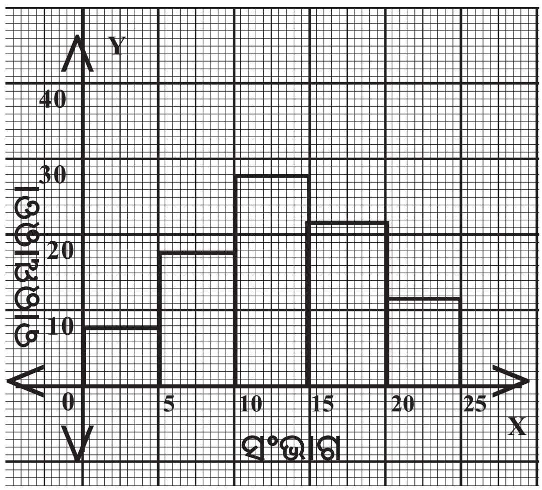
ଲବ୍ଧାଙ୍କ	5	6	7	8	9	10
ବାରମ୍ବାରତା	12	21	28	24	16	8

ସାରଣୀ–15

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
ବାରମ୍ବାରତା	8	18	28	22	12



(ଚିତ୍ର 7.5)



(ଚିତ୍ର 7.6)

ଟୀକା: ବାରମ୍ବାରତା ସୂଚକ ଅକ୍ଷରେ ମୂଳ ବିନ୍ଦୁକୁ 0 ନିଆଯାଇ ସ୍କେଲ୍ ଅନୁଯାୟୀ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଉକ୍ତ ଅକ୍ଷର ଉପର ଆଡ଼କୁ ସୂଚିତ ହୋଇ ଅଛନ୍ତି । କିନ୍ତୁ ଲବ୍ଧାଙ୍କ ଅକ୍ଷରେ 0 ଠାରୁ 4 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ସ୍କେଲ୍ ଅନୁଯାୟୀ ନିଆ ନ ଯାଇ 4 ଠାରୁ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍କେଲ୍ ଅନୁଯାୟୀ କ୍ରମାନ୍ୱୟରେ ଡାହାଣ ପାଖକୁ ସ୍ଥାପନ କରାଯାଇଛି । ସର୍ବନିମ୍ନ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 5 ହୋଇଥିବାରୁ ସେମାନଙ୍କୁ 4 ଠାରୁ ସୂଚିତ କରାଯାଇଛି । ଆସନ୍ନମାନ ନିୟମ ଅନୁଯାୟୀ ଲବ୍ଧାଙ୍କ 5 ର ବିସ୍ତାର 4.5 ରୁ 5.5 ପର୍ଯ୍ୟନ୍ତ ଏବଂ ଅନ୍ୟଗୁଡ଼ିକର ବିସ୍ତାର ତଦନୁଯାୟୀ ନିଆଯାଏ ।

ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ବାରମ୍ବାରତା ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କନର ଅନ୍ୟ ଏକ ନମୁନା ଚିତ୍ର 5.6 ରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

7.8.4 ବୃତ୍ତ ଲେଖ (Pie-chart ବା Circle graph):

ସଂଗୃହୀତ ତଥ୍ୟକୁ ଅନେକ ସମୟରେ ଏକ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଆନୁପାତିକ ଅଂଶରୂପେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇ ଚିତ୍ର ଅଙ୍କନ କରାଯାଇଥାଏ। ନିମ୍ନରେ ଏ ପ୍ରକାର ଚିତ୍ରର ଏକ ନମୁନା ଦିଆଯାଇଛି।

କୌଣସି ଏକ ଶିକ୍ଷାନୁଷ୍ଠାନର 240 ଜଣ କର୍ମଚାରୀଙ୍କୁ ସେମାନଙ୍କର ମାସିକ ବେତନ ଅନୁଯାୟୀ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ବିଭିନ୍ନ ଭାଗରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଛି।

ସାରଣୀ–15

କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟା	ମାସିକ ବେତନ ସୀମା
30	1000 ଟଙ୍କା କିମ୍ବା ତହିଁରୁ ଅଧିକ
80	700 ଟଙ୍କା କିମ୍ବା ତହିଁରୁ ଅଧିକ ମାତ୍ର 1000 ଟଙ୍କାରୁ କମ୍
90	500 ଟଙ୍କା କିମ୍ବା ତହିଁରୁ ଅଧିକ ମାତ୍ର 700 ଟଙ୍କାରୁ କମ୍
40	500 ଟଙ୍କାରୁ କମ୍

ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ଏକ ବୃତ୍ତ ଲେଖରେ ପ୍ରକାଶ କରିବାକୁ ହେଲେ, ଏକ ବୃତ୍ତାକାର କ୍ଷେତ୍ରଟି ଚାରିଟି ଅଂଶ (ବୃତ୍ତାକଳା) ଦ୍ୱାରା ଉପରୋକ୍ତ ଚାରି ଶ୍ରେଣୀର କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟାକୁ ଏପରି ସୂଚିତ କରାଯିବ ଯେପରି ବୃତ୍ତକଳା ଚାରିଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ ଚାରିଶ୍ରେଣୀର କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ହେବ।

$\therefore$ ବୃତ୍ତକଳା ଚାରିଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ= 30:80:90:40 = 3:8:9:4

ମାତ୍ର ବୃତ୍ତକଳାମାନଙ୍କର କ୍ଷେତ୍ରଫଳର ଅନୁପାତ= ସେମାନଙ୍କର କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣମାନଙ୍କର ପରିମାଣର ଅନୁପାତ।

$\therefore$ ବୃତ୍ତକଳା ଚାରିଟିର କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ = 3:8:9:4

ବୃତ୍ତକଳା ଚାରିଟିର କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣମାଙ୍କର ପରିମାପ x^0_1, x^0_2, x^0_3, x^0_4 ହୁଅନ୍ତୁ।

ଫଳରେ $x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = 3:8:9:4$ ବା $\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3+x_4} = \frac{3}{3+8+9+4}$

ବା $x_1 = \frac{3}{24} \times (x_1+x_2+x_3+x_4) = \frac{3}{24} \times 360 = 45^0$

($\because$ ସମସ୍ତ ବୃତ୍ତକଳାର କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣର ପରିମାଣର ସମଷ୍ଟି = 360^0)

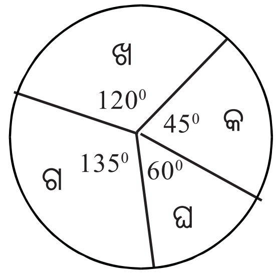
ସେହିପରି $x_2 = \frac{8}{24} \times 360^0 = 120^0$, $x_3 = \frac{9}{24} \times 360^0 = 135^0$ ଏବଂ $x_4 = \frac{4}{24} \times 360^0 = 60^0$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣର ପରିମାଣ ପୂର୍ଣ୍ଣ ସଂଖ୍ୟକ ଡିଗ୍ରୀ ନ ହେଲେ ଏହାର ଆସନ୍ନମାନ କେବଳ ଡିଗ୍ରୀରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ।

କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ ସାରଣୀ **ସାରଣୀ – 16**

କ୍ରମିକ ସଂଭାଗ	ବେତନ ସୀମା	କର୍ମଚାରୀ ସଂଖ୍ୟା (ବାରମ୍ବାରତା) f	ସମାନୁପାତୀ ଭଗ୍ନସଂଖ୍ୟା $\frac{f}{\Sigma f}$	କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣ $\theta = \frac{f}{\Sigma f} \times 360^0$
(କ)	1000 ଟଙ୍କା ଓ ତଦୂର୍ଦ୍ଧ୍ୱ	30	$\frac{30}{240} = \frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} \times 360^0 = 45^0$
(ଖ)	700ଟ.–1000ଟ.	80	$\frac{80}{240} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times 360^0 = 120^0$
(ଗ)	500ଟ.–700ଟ.	90	$\frac{90}{240} = \frac{3}{8}$	$\frac{3}{8} \times 360^0 = 135^0$
(ଘ)	500ଟ.ରୁ କମ୍	40	$\frac{40}{240} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \times 360^0 = 60^0$
		$\Sigma f = 240$		$\Sigma\theta = 360^0$

3 ବା 4 ସେ.ମି. ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ବୃତ୍ତ ଅଙ୍କନ କରି ତହିଁରେ କୌଣସି ଏକ ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ ଓ ସେହି ବ୍ୟାସାର୍ଦ୍ଧ ଠାରୁ ଆରମ୍ଭ କରି ପ୍ରୋଟ୍ରାକ୍ଟର ସାହାଯ୍ୟରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ କେନ୍ଦ୍ରୀୟ କୋଣ ବିଶିଷ୍ଟ ବୃତ୍ତକଳାମାନ ଅଙ୍କନ କରାଯାଏ। ବୃତ୍ତକଳା ଗୁଡ଼ିକରେ ବିଭିନ୍ନ ବିଭାଗମାନଙ୍କର ସୂଚନା ଦେବାକୁ ପଡ଼େ। ଉପରୋକ୍ତ ତଥ୍ୟକୁ ବୃତ୍ତଲେଖରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଇଛି।



(ଚିତ୍ର 7.7)

ଅନୁଶୀଳନୀ – 7 (d)

1. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କନ କର।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
ବାରମ୍ବାରତା	16	25	36	22	18

2. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀ ଅନ୍ତର୍ଭୁକ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀର ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କନ କର।

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	5-9	10-14	15-19	20-24	25-29
ବାରମ୍ବାରତା	8	12	20	16	10

ସୂଚନା: ଏଠାରେ ପ୍ରଥମ ଆୟତ ଚିତ୍ର 4.5 ରୁ 9.5 ଓ ଦ୍ୱିତୀୟ ଆୟତଚିତ୍ର 9.5 ରୁ 14.5 ଓ ଅନ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ତଦନୁଯାୟୀ ନିଆଯିବେ।

3. ନିମ୍ନସ୍ଥ ସାରଣୀରେ ଦତ୍ତ ତଥ୍ୟାବଳୀ ପାଇଁ ଏକ ପୌନଃପୁନ୍ୟ ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ର ସହ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ ଅଙ୍କନ କର।

ସଂଭାଗ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
ବାରମ୍ବାରତା	5	10	8	5	2

4. ନିମ୍ନ ତଥ୍ୟାବଳୀର ଉପସ୍ଥାପନା ପାଇଁ ଏକ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍ ଅଙ୍କନ କର।

ସଂଭାଗ	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା	15	20	35	10	4

5. ଗୋଟିଏ ବିଦ୍ୟାଳୟର ପାଞ୍ଚଟି ଶ୍ରେଣୀର ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା ଦିଆଯାଇଛି। ଏହି ତଥ୍ୟକୁ ଏକ ବୃତ୍ତ ଲେଖରେ ପ୍ରକାଶ କର।

ଶ୍ରେଣୀ	VI	VII	VIII	IX	X
ଛାତ୍ରସଂଖ୍ୟା	48	60	54	72	36

6. କୌଣସି ଏକ କାରଖାନାରେ ବିଭିନ୍ନ ବର୍ଷମାନଙ୍କରେ ଉତ୍ପାଦିତ ବସ୍ତୁ ସଂଖ୍ୟା ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି। ଏହି ତଥ୍ୟକୁ ବୃତ୍ତ ଲେଖରେ ପ୍ରକାଶ କର।

ବର୍ଷ	1984	1985	1986	1987	1988
ଉତ୍ପାଦିତ ବସ୍ତୁର ସଂଖ୍ୟା (ହଜାରରେ)	30	36	48	60	66

7. ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତିଙ୍କର ଗୋଟିଏ ବର୍ଷର ଖର୍ଚ୍ଚ ଅଟକଳ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି। ଏହି ତଥ୍ୟକୁ ଏକ ବୃତ୍ତ ଲେଖରେ ପ୍ରକାଶ କର ।

ଖର୍ଚ୍ଚ ବାବଦ:	ଖାଦ୍ୟ	ପୋଷାକ	ସ୍ୱାସ୍ଥ୍ୟ	ଶିକ୍ଷା	କୃଷି	ଘର ମରାମତି	ଅନ୍ୟାନ୍ୟ
ଅଟକଳ (ଶହ ଟଙ୍କାରେ);	30	10	6	12	25	12	13

8. (a) ନିମ୍ନସ୍ଥ ଲବ୍ଧାଙ୍କମାନଙ୍କୁ ଭାଗ ବିଭକ୍ତ ହୋଇ ନଥିବା ଏକ ପୌନଃପୁନ୍ୟ ସାରଣୀରେ ପ୍ରକାଶ କର।

ଶିଶୁମେଳାର ମନୋରଞ୍ଜନ କାର୍ଯ୍ୟକ୍ରମରେ ଭାଗନେଇଥିବା ଶିଶୁମାନଙ୍କର ବୟସ ନିମ୍ନରେ ଦିଆଯାଇଛି।

8	7	10	5	7	8	10	6	9	9	6	8
7	6	8	8	6	6	7	5	10	8	9	8
5	7	7	6	5	9	7	11	14	8	9	12
6	13	7	8	11	10	10	9	8	5	12	15
9	12	14	8	9	10	11	11	14	8	15	7

(b) ଉକ୍ତ ସାରଣୀକୁ ଏକ ବାରମ୍ବାରତା ନିର୍ଦ୍ଦେଶକ ରେଖାଚିତ୍ରରେ ପ୍ରକାଶ କର।

(c) ଉକ୍ତ ସାରଣୀକୁ ଏକ ହିଷ୍ଟୋଗ୍ରାମ୍‌ରେ ପ୍ରକାଶ କର।

(d) ଉକ୍ତ ସାରଣୀକୁ ଏକ ବୃତ୍ତ ଲେଖରେ ପ୍ରକାଶ କର।

ଅଷ୍ଟମ ଅଧ୍ୟାୟ

ସମ୍ଭାବ୍ୟତା

(PROBABILITY)

8.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ସମୟରେ ବର୍ଷା ହେବାର ସମ୍ଭାବନା, ପ୍ରତିଯୋଗିତାରେ ଭାଗ ନେବାକୁ ଥିବା ଗୋଟିଏ ଦଳର ଜିତିବାର ସମ୍ଭାବନା, ଲଟେରୀ ଟିକେଟ୍ କିଣିଥିବା ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ପ୍ରଥମ ପୁରସ୍କାର ପାଇବାର ସମ୍ଭାବନା, ପରୀକ୍ଷା ଦେବାକୁ ଥିବା ଜଣେ ବିଦ୍ୟାର୍ଥୀ ପ୍ରଥମ ସ୍ଥାନ ଅଧିକାର କରିବାର ସମ୍ଭାବନା ଇତ୍ୟାଦି ବିଷୟ ଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧ୍ୟାନ କଲେ ଜଣାଯାଏ, ଏଥିରୁ କୌଣସିଟି ନିଶ୍ଚିତ ନୁହେଁ । ମାତ୍ର ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ କିଛି ନା କିଛି ସମ୍ଭାବନା ଅଛି । ପ୍ରଶ୍ନ ଉଠୁଛି ସମ୍ଭାବନା କେତେ ? ''ଏହାକୁ କଣ ମପାଯାଇ ପାରିବ ?'' କୌଣସି ଏକ ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବନାର ପରିମାପରୁ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱ (Probability Theory) ସୃଷ୍ଟି ହୋଇଥିଲା ।

ଫ୍ରାନ୍ସ୍‌ରେ ପୂରାତନ କାଳରେ ଜୁଆ ଖେଳ ଅତ୍ୟନ୍ତ ଲୋକପ୍ରିୟ ଥିଲା । ଏଣୁ ଖେଳରେ ଅର୍ଥ ଖଟାଇ ବାଜି ଜିତିବାର ସମ୍ଭାବନା କେତେ ? ଏହି ପ୍ରଶ୍ନ, ଅର୍ଥ ଖଟାଉ ଥିବା ଲୋକମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ମୁଖ୍ୟ ଆଲୋଚ୍ୟ ବିଷୟ ଥିଲା । 1654 ମସିହା କଥା । Chevalier de Mere ନାମକ ଜଣେ ବ୍ୟକ୍ତି ଜୁଆ ଖେଳରେ ସିଦ୍ଧ ହସ୍ତ ଥିଲେ । ବାଜି ଜିତିବାର ସମ୍ଭାବନା ସମ୍ପର୍କରେ ସେ ଗଣିତଜ୍ଞ Blaise Pascal (1623 - 1662) ଙ୍କୁ ସେ ବାରମ୍ବାର ପ୍ରଶ୍ନ ପଚାରୁ ଥିଲେ । Blaise Pascal ଓ Pierre de Format (1601 - 1655) ଏହି ଦୁଇଜଣ ଫରାସୀ ଗଣିତଜ୍ଞ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ ବାଜି ଜିତିବାର ସମ୍ଭାବନା ସମ୍ପର୍କରେ ଆଲୋଚନା କରୁଥିଲେ ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକେ ବାଜି ଜିତିବାର ସମ୍ଭାବନା ସମ୍ପର୍କିତ ସମସ୍ୟାର ସମାଧାନ କରିଥିଲେ । ଏହି ଦୁଇ ଗଣିତଜ୍ଞଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନର ସୂତ୍ରରୁ ହିଁ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱ ଷୋଡଶ ଶତାବ୍ଦୀରେ ଜନ୍ମଲାଭ କରିଥିଲା । ପରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱକୁ ଯେଉଁ ଗଣିତଜ୍ଞ ମାନେ ପରିପୁଷ୍ଟ କରିଥିଲେ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ Jacob Bernoulli (1654 - 1705), P. Laplace (1749 - 1827), Abraham de Moivre (1667 - 1754) ଙ୍କ ନାମ ଉଲ୍ଲେଖ ଯୋଗ୍ୟ। ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱର ପ୍ରଥମ ପୁସ୍ତକ, ଯାହା 1654 ମସିହାରେ ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଥିଲା, ତାହାର ରଚୟିତା ଥିଲେ ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନବିତ୍ Christiaan Huygens (1629 - 1695) । ଯେଉଁ ଗଣିତଜ୍ଞସମୂହ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱକୁ ଆଧୁନିକ ଗଣିତର ରୂପ ପ୍ରଦାନ କରିଛନ୍ତି; ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରେ A.N.Kalmogorov, A.A. Markovଙ୍କ ନାମ ଉଲ୍ଲେଖଯୋଗ୍ୟ । ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱର ବହୁଳ ପ୍ରୟୋଗ ଯେଉଁ ବିଭାଗଗୁଡ଼ିକରେ ଅଛି, ସେଗୁଡ଼ିକ ହେଲା, ପଦାର୍ଥ ବିଜ୍ଞାନ, ଜୀବବିଜ୍ଞାନ, ଅର୍ଥନୀତି, ଯୋଜନା ପ୍ରକରଣ, ପାଣିପାଗର ପୂର୍ବାନୁମାନ, ବାଣିଜ୍ୟ ବିଭାଗ ଇତ୍ୟାଦି ।

8.2 ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ଧାରଣା :

ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ଧାରଣା ପରୀକ୍ଷଣ (Experiments) ଏବଂ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ (Observations) ଉପରେ ଆଧାରିତ। ପ୍ରକୃତ ପରୀକ୍ଷଣ କରି ଏବଂ ସେଥିରୁ ଉଦ୍ଭବ ଫଳାଫଳର ପ୍ରକୃତ ଉପସ୍ଥାପନା କରାଯାଇ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାକୁ ସଂଖ୍ୟାରେ ମାପ କରାଯାଇଥିବାରୁ ଏହାକୁ Empirical Probability କୁହାଯାଏ । ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ (Tossing a coin) ଓ ଲୁଡୁ ଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବା (Throwing of dice) ଭଳି କେତେକ ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଆମେ Probability ର ସ୍ପଷ୍ଟ ଧାରଣା ପାଇପାରିବା । ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାର ଦୁଇଟି ପାର୍ଶ୍ୱ Head (H) ଓ ଏହାର ବିପରୀତ ପାର୍ଶ୍ୱ Tail (T) ଥାଏ । ମୁଦ୍ରାଟିକୁ ଟସ୍ କଲେ H କିମ୍ବା T ଉପରକୁ ଆସି ପଡ଼ିବ, ତାହା ତୁମେ ଜାଣିଛ । ଟସ୍ ପୂର୍ବରୁ ଆମେ କହିପାରିବା କି, ପଡ଼ିଥିବା ପାର୍ଶ୍ୱଟି Head ହେବ କିମ୍ବା Tail ହେବ ? କାରଣ ଏହି ଫଳାଫଳ କୌଣସି ନିୟମର ଅଧୀନ ନୁହେଁ । ଫଳାଫଳ ଯାହାବି ଆସିବାର ସମ୍ଭାବନା ଅଛି ଏଥିପାଇଁ ବ୍ୟବହୃତ ମୁଦ୍ରାଟି ଅନପେକ୍ଷ ଅଥବା ଅପ୍ରବଣ (unbiased) ଏବଂ ସମତୁଲ୍ୟ (balanced) ହେବା ଦରକାର, ଯେପରିକି ଫଳାଫଳ H କିମ୍ବା T ହେବାର ସମ୍ଭାବନା (Chance) ସମାନ ହେଉଥିବ । ସେହିପରି ଲୁଡୁଗୋଟି ମଧ୍ୟ ଅପ୍ରବଣ ଏବଂ ସମୁତଲ୍ୟ ହେବା ଆବଶ୍ୟକ; ଯେପରିକି ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବା ଦ୍ୱାରା ଏଥିରେ ପଡୁଥିବା ଛଅଗୋଟି ଫଳାଫଳ ଯଥା : 1,2,3,4,5 ଓ 6 ପଡ଼ିବାର ସମ୍ଭାବନା ସମାନ ହେଉଥିବ । ଉକ୍ତ ଆଲୋଚନାରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେବଳ ପରୀକ୍ଷଣ (Experiments) ଏବଂ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣ (Observations) ଉପରେ ପର୍ଯ୍ୟବେସିତ ହେବ ।

ମନେରଖ : ମୁଦ୍ରା ଟସ୍‌ରେ ମୁଦ୍ରାଟି ସର୍ବଦା ଅପ୍ରବଣ ଓ ସମତୁଲ୍ୟ । ସୁତରାଂ ଏହି ବିଶେଷଣ ଦ୍ୱୟଙ୍କୁ ବ୍ୟବହାର ନ କଲେ ମଧ୍ୟ ବ୍ୟବହୃତ ମୁଦ୍ରାଟି ଅପ୍ରବଣ ଓ ସମତୁଲ୍ୟ ବୋଲି ଧରି ନିଆଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଘଟଣା **(Event)** : ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷଣରେ ଉପୁଜିଥିବା ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳ ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ସଂଖ୍ୟକ ଫଳାଫଳମାନଙ୍କୁ ବିଚାର କରିବା ଦ୍ୱାରା ଗୋଟିଏ ଘଟଣା ଉପୁଜିଥାଏ । ଉଦାହରଣସ୍ୱରୂପ ମୁଦ୍ରା ଏକଥର ଟସ୍ କଲେ ଫଳ T କିମ୍ବା H ହେବ । ଏଠାରେ ଦୁଇଗୋଟି ଘଟଣା ଉପୁଜିଲା ବୋଲି କହିବାକୁ ହେବ ।

ଆସ, ନିମ୍ନ କେତେକ ପରୀକ୍ଷଣ ସହ ଜଡ଼ିତ ହେବା ଯାହା ଦ୍ୱାରା ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ତତ୍ତ୍ୱକୁ ବୁଝିବା ଆମ ପକ୍ଷେ ସହଜ ହୋଇପାରିବ ।

ପ୍ରଥମ ପରୀକ୍ଷଣ, ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ (Tossing a coin) :

ପ୍ରଥମେ ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ 10 ଥର ଟସ୍ କରିବା । ଆମେ ଜାଣିଛେ ଥରେ ଟସ୍ କଲେ, H କିମ୍ବା T ପଡ଼ିବ । ଆସ ଗୋଟିଏ ସାରଣୀ ଏପରି ପ୍ରସ୍ତୁତ କରିବା ଯେଉଁଥିରେ 10 ଥର ଟସ୍‌ରେ ପଡୁଥିବା H ଏବଂ T କୁ ଠିକ୍ ଭାବେ ଲିପିବଦ୍ଧ ପାଇଁ ଅନୁରୂପ ସ୍ତମ୍ଭରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ଟିକ୍ (✓) ଚିହ୍ନ ଦେଇପାରିବା ।

ଟେବୁଲ - 1

ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା	ମୁଦ୍ରାର H ପାର୍ଶ୍ୱ	ମୁଦ୍ରାର T ପାର୍ଶ୍ୱ
1.		
2.		
3.		
....		
....		
9.		
10.		

(i) ତତ୍ପରେ ଟିକ୍ ଚିହ୍ନକୁ ଗଣି ଟସ୍ ଦ୍ୱାରା ପଡ଼ିଥିବା ସମୁଦାୟ H ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ସମୁଦାୟ T ପାର୍ଶ୍ୱ ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କର ।

(ii) ସମୁଦାୟ H ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାକୁ ନେଇ ସେମାନଙ୍କର ଅନୁପାତ ସ୍ଥିର କର ।

ସେହିପରି ସମୁଦାୟ T ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟ ସ୍ଥିର କର ।

ଅର୍ଥାତ୍ 10 ଗୋଟି ଟସ୍ ପାଇଁ $\dfrac{\text{ସମୁଦାୟ H ସଂଖ୍ୟା}}{\text{ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}}$ ଏବଂ $\dfrac{\text{ସମୁଦାୟ T ସଂଖ୍ୟା}}{\text{ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}}$ ସ୍ଥିର କରିବା ।

ପୁଣି 20 ଥର ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ପାଇଁ ଏବଂ 30 ଥର ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ପାଇଁ ଉକ୍ତ ପରୀକ୍ଷଣର ପୁନରାବୃତ୍ତି କରିବା । ସେଥିରୁ ପୂର୍ବଭଳି ମୁଦ୍ରା ଟସ୍‌ରେ ପଡୁଥିବା H ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ T ସଂଖ୍ୟା ସ୍ଥିର କରିବା ଏବଂ ପରେ ଦ୍ୱିତୀୟ ସୋପାନକୁ ଆଧାର କରି ପ୍ରତ୍ୟେକ ପରୀକ୍ଷଣ ପାଇଁ ଆନୁପାତିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କରିବା । ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପୂର୍ବ ଭଳି ଗୋଟିଏ ଲେଖାଏଁ ଟେବୁଲ ପ୍ରସ୍ତୁତ କର ଏବଂ ଟେବୁଲ୍‌ରୁ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ତଥ୍ୟ ଆଧାରରେ ଆନୁପାତିକ ସଂଖ୍ୟାଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କରିବା ପାଇଁ ଚେଷ୍ଟା କର ।

ଏହିପରି ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା (n) କ୍ରମେ କ୍ରମେ ବଢ଼ିଚାଲିଲେ (H) ର ବାରମ୍ବାରତା (m) (ଟସ୍‌ରେ ପଡୁଥିବା ସମୁଦାୟ H ସଂଖ୍ୟା) $\frac{n}{2}$ ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ । ଏହି ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଆମେ କହିପାରିବା ଯେ, ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା n ଅତି ବୃହତ୍ ହେଲେ

$\dfrac{\text{H ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{m}{n} \approx \dfrac{1}{2}$ ହେବ । ସେହିପରି Tର ବାରମ୍ବାରତା ଓ ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ ମଧ୍ୟ $\frac{1}{2}$ ହେବ ।

ସଂକ୍ଷେପରେ ଆମେ ଲେଖିବା, H ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{1}{2}$, ଏବଂ T ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{1}{2}$ । ଏହାକୁ ସଂକେତ ମାଧ୍ୟମରେ ଲେଖିବା $P(H) = \frac{1}{2}$ ଓ $P(T) = \frac{1}{2}$ ।

ଏକ ପରୀକ୍ଷଣ କରି ନିମ୍ନ ଟେବୁଲ୍‌ଟି ଗଠନ କରାଯାଇଛି । ଏଥିରେ ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାର ବୃଦ୍ଧି କରାଯାଇଛି ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଟସ୍‌ରେ ପଡୁଥିବା H ସଂଖ୍ୟାକୁ ମଧ୍ୟ ଲିପିବଦ୍ଧ କରାଯାଇଛି । ତତ୍ପରେ ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ P(H) ନିରୂପଣ କରାଯାଇଛି ।

ଟେବୁଲ - 2

ପରୀକ୍ଷଣର କ୍ରମିକ ନଂ	ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା (n)	H ର ବାରମ୍ବାରତା (m)	$P(H)=\frac{m}{n}$
1	20	13	0.650
2	50	23	0.460
3	100	56	0.560
4	200	107	0.535
5	500	259	0.518
6	1000	496	0.496

ଏହି ଟେବୁଲ୍‌ରୁ ସ୍ପଷ୍ଟ ଯେ, ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା (n) ର ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଲେ ଶେଷ ସ୍ତମ୍ଭରେ ପାଇଥିବା ସଂଖ୍ୟା ଓ 0.5 ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{1}{2}$ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ କ୍ରମେ କ୍ରମେ କମି ଆସୁଛି । ସେହିପରି ପ୍ରତ୍ୟେକ କ୍ଷେତ୍ରରେ T ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତାକୁ ସ୍ଥିର କରାଯାଇପାରେ ।

ମନେରଖ: H ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ଓ T ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ସମଷ୍ଟି = P(H) + T(H) = 1 ହେବ । (ନିଜେ ପରୀକ୍ଷା କରି ଦେଖ)

ଦ୍ୱିତୀୟ ପରୀକ୍ଷଣ (ଲୁଡୁ ଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବା) :

ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ 15 ଥର ଗଡ଼ାଇବା । ପ୍ରତ୍ୟେକ ଥର 1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6 ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ସଂଖ୍ୟା, ଗୋଟିର ଉପର ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଦୃଶ୍ୟମାନ ହେବ । (ଅବଶ୍ୟ କେତେକ ଗୋଟିରେ ଉକ୍ତ ସଂଖ୍ୟା ପରିବର୍ତ୍ତେ ସେହି

ସଂଖ୍ୟକ ଚିହ୍ନ ମଧ୍ୟ ଥାଏ) । ପ୍ରଥମ ପରୀକ୍ଷଣ ଭଳି ପ୍ରତ୍ୟେକ ଥର ଲୁଡୁ ଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବା ପରେ ଗୋଟିର ଉପରକୁ ଦେଖାଯାଉଥିବା ସଂଖ୍ୟାକୁ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲ୍‌ରେ ଟିକ୍ ଚିହ୍ନ ଦ୍ୱାରା ଅନୁରୂପ ସ୍ତମ୍ଭମାନଙ୍କରେ ଲିପିବଦ୍ଧ କର ।

ଟେବୁଲ - 3

ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବା ସଂଖ୍ୟା	1	2	3	4	5	6
I						
II						
III						
.....						
XV						

ଟେବୁଲ୍‌ରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳ ଅର୍ଥାତ୍ 1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6 ର ବାରମ୍ବାରତା ସ୍ଥିର କର ଏବଂ ପ୍ରତ୍ୟେକର ବାରମ୍ବାରତା ଓ ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବାର ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତକୁ ସ୍ଥିର କର । ଏଠାରେ ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବାର ସଂଖ୍ୟାକୁ ଯଥାକ୍ରମେ 40 ଥର ଓ 50 ଥରକୁ ବଢ଼ାଅ ଏବଂ ପୂର୍ବ ଭଳି 1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6 ର ବାରମ୍ବାରତା ଓ ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତଗୁଡ଼ିକୁ ସ୍ଥିର କର । ଉକ୍ତ ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଜାଣିପାରିବା ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳର ବାରମ୍ବାରତା ଓ ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବାର ସଂଖ୍ୟାର ଅନୁପାତ $\frac{1}{6}$ ଅର୍ଥାତ୍ 0.166 ର ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେବ ।

ବର୍ତ୍ତମାନ ଲୁଡୁଗୋଟି ଗଡ଼ାଯାଉଥିବା ସଂଖ୍ୟା (n) କୁ ବୃଦ୍ଧି କରାଯାଇ ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷଣରେ କେବଳ ଫଳ '4' ର ବାରମ୍ବାରତା (m) ସ୍ଥିର କରାଯାଇଛି । ତତ୍ପରେ $\frac{m}{n}$ ସ୍ଥିର କରି ନିମ୍ନ ଟେବୁଲ୍‌ର ଅନୁରୂପ ସ୍ତମ୍ଭଗୁଡ଼ିକରେ ଲିପିବଦ୍ଧ କରାଯାଇଛି ।

ଟେବୁଲ - 4

ଗୋଟି ଗଡ଼ାଯାଉଥିବା ସଂଖ୍ୟା (n)	ଫଳ 4 ର ବାରମ୍ବାରତା (m)	$P(4) = \frac{m}{n} = \frac{\text{'4' ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ଗୋଟି ଗଡ଼ିଥିବା ସଂଖ୍ୟା}}$
10	4	0.4
30	3	0.333
60	12	0.200
120	18	0.150
600	98	0.163
1200	202	0.167

ଏଠାରେ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ଯେ n ର ମୂଲ୍ୟରେ ବୃଦ୍ଧି ଘଟିଲେ $\frac{m}{n}$ ର ମାନ 0.166 କିମ୍ବା $\frac{1}{6}$ ନିକଟବର୍ତ୍ତୀ ହେଉଛି । ଏଠାରେ ସଂକ୍ଷେପରେ ଲେଖିପାରିବା 4 ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $= P(4) = \frac{1}{6}$

ସେହିପରି 1, 2, 3, 5 ଓ 6 ପ୍ରତ୍ୟେକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $\frac{1}{6}$ ନିରୂପଣ କରାଯାଇପାରେ । ଏଠାରେ ଆମେ ଏହି ପରୀକ୍ଷଣରୁ ଏହି ସିଦ୍ଧାନ୍ତରେ ଉପନୀତ ହେବା ଯେ, ଗୋଟିଏ ଫଳର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $= \frac{\text{ଫଳଟିର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ସମୁଦାୟ ଗୋଟି ଗଡିବାର ସଂଖ୍ୟା}}$

ସୁତରାଂ E ଏକ ଘଟଣା ହେଲେ ଏହାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $P(E) = \frac{m}{n}$

ଉପରୋକ୍ତ ପରୀକ୍ଷଣଦ୍ୱୟରୁ ଜାଣିଲେ,

(i) $0 < P(E) < 1$ ଅର୍ଥାତ୍ ଯେକୌଣସି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା 0 ଏବଂ 1 ମଧ୍ୟସ୍ଥ ଏକ ସଂଖ୍ୟା ।

(ii) ଗୋଟିଏ ପରୀକ୍ଷଣରେ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ସମଷ୍ଟି ସର୍ବଦା 1 ସହ ସମାନ ହେବ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : (a) ପରୀକ୍ଷଣରେ ଯଦି ଏକ ନିର୍ଦ୍ଦିଷ୍ଟ ଫଳ ନିଶ୍ଚିତ ଭାବେ ଘଟେ, ତେବେ ଉକ୍ତ ଫଳର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା 1 ସହ ସମାନ ହେବ ।

(b) ପରୀକ୍ଷଣରେ ଯଦି କୌଣସି ଫଳ କେବେ ହିଁ ଉପୁଜି ନ ଥାଏ ତେବେ ଏହାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ଶୂନ ।

ତେଣୁ, $\mathbf{0 \le P(E) \le 1}$

ଉଦାହରଣ - 1 : ଗୋଟିଏ ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ 500 ଥର ଟସ୍ କରାଯିବାରୁ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରରେ ଫଳ ଘଟିଲା । H : 260, T : 240

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳ ପାଇଁ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ସମୁଦାୟ ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା = 500, H ର ବାରମ୍ବାରତା = 260 ଏବଂ T ର ବାରମ୍ବାରତା = 240

ଅତଏବ $P(H) = \dfrac{\text{H ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{260}{500} = \dfrac{13}{25}$ ଅଥବା 0.52

ସେହିପରି $P(T) = \dfrac{\text{T ର ବାରମ୍ବାରତା}}{\text{ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{240}{500} = \dfrac{12}{25}$ ଅଥବା 0.48

ଲକ୍ଷ୍ୟ କର, $P(H) + P(T) = 1$

ଉଦାହରଣ - 2 : ଦୁଇଗୋଟି ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ 500 ଥର ଟସ୍ କରାଯିବାରୁ ଫଳ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର ଲବ୍ଧ ହେଲା ।

(i) ଦୁଇଟି H : 105 ଥର, (ii) ଗୋଟିଏ H : 275 ଥର, (iii) କୌଣସିଟି H ନୁହେଁ : 120 ଥର

ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳ ପାଇଁ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କରି ସେମାନଙ୍କର ସମଷ୍ଟି ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଦୁଇଟି H କୁ HH, ଗୋଟିଏ H କୁ HT କିମ୍ବା TH ଓ କୌଣସିଟି H ନୁହେଁ କୁ TT ରୂପେ ସୂଚିତ କରାଯାଇ ଥାଏ । କାରଣ ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଟସ୍ କରାଇଲେ ସମ୍ଭାବ୍ୟ ଫଳାଫଳଗୁଡ଼ିକ ହେବ HH, HT, TH, TT ।

ସମୁଦାୟ ଟସ୍ ସଂଖ୍ୟା (n) = 500 ଏବଂ HH ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $P(HH) = \dfrac{105}{500} = \dfrac{21}{100}$,

HT କିମ୍ବା TH ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = P (HT କିମ୍ବା TH) = $\dfrac{275}{500} = \dfrac{11}{20}$

ଏବଂ HH ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $P(TT) = \dfrac{120}{500} = \dfrac{6}{25}$;

ଏଠାରେ ନିରୂପିତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାଗୁଡ଼ିକର ସମଷ୍ଟି = P (HH) + P (HT କିମ୍ବା TH) + P (TT)

$$= \frac{21}{100} + \frac{11}{20} + \frac{6}{25} = \frac{21 + 55 + 24}{100} = \frac{100}{100} = 1$$

ଉଦାହରଣ – 3 : ଗୋଟିଏ ଅପ୍ରବଣ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ 1000 ଥର ଗଡ଼ାଇ ଦିଆଯିବାରୁ ନିମ୍ନରେ ପ୍ରଦତ୍ତ ଫଳ ଗୁଡିକ ଲବ୍ଧ ହେଲା ।

ଫଳ :	1	2	3	4	5	6
ବାରମ୍ବାରତା :	150	157	149	180	179	185

ଏହି ତଥ୍ୟକୁ ଉପଯୋଗ କରି (i) 6 ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା, (ii) ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାପଡିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ଓ (iii) 2 କିମ୍ବା 4 ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ଏଠାରେ ମୋଟ୍ ପରୀକ୍ଷଣ ସଂଖ୍ୟା (n) = 1000

(i) ଫଳ 6 ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $P(6) = \frac{185}{1000} = 0.185$

(ii) ଫଳ 1 ର ବାରମ୍ବାରତା = 150, ଫଳ 3 ର ବାରମ୍ବାରତା = 149 ଓ ଫଳ 5 ର ବାରମ୍ବାରତା = 179 ;

ଅତଏବ ଫଳ ଅଯୁଗ୍ମ ହେବାର ବାରମ୍ବାରତାର ସମଷ୍ଟି = 150 + 149 + 179 = 478

ସୁତରାଂ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{478}{1000} = 0.478$ ।

(iii) 2 ର ବାରମ୍ବାରତା = 157, 4 ର ବାରମ୍ବାରତା = 180 ;

ସୁତରାଂ 2 କିମ୍ବା 4 ର ବାରମ୍ବାରତା = 157 + 180 = 337 ।

$\therefore$ 2 କିମ୍ବା 4 ର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା = $\frac{337}{1000} = 0.337$

ଉଦାହରଣ - 4 : ଏକ ସହରରେ ଥିବା 2000 ସଂଖ୍ୟକ ଗାଡିଚାଳକ ମାନଙ୍କ ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣରୁ ନିମ୍ନଲିଖିତ ତଥ୍ୟ ଉପଲବ୍ଧ ହେଲା ।

ଚାଳକ ମାନଙ୍କ ବୟସ (ବର୍ଷରେ)	ଗୋଟିଏ ବର୍ଷରେ ଘଟିଥିବା ଗାଡି ଦୁର୍ଘଟଣା ସଂଖ୍ୟା				
	0	1	2	3	3 ରୁ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ
18 ରୁ 29	440	160	110	61	35
30 ରୁ 50	505	125	60	22	18
50 ରୁ ଉର୍ଦ୍ଧ୍ୱ	360	45	35	15	9

ଏହି ତଥ୍ୟକୁ ବ୍ୟବହାର କରି ନିମ୍ନଲିଖିତ କ୍ଷେତ୍ର ଗୁଡିକରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

(i) 18 ରୁ 29 ବର୍ଷ ବୟସର ଚାଳକ ବର୍ଷରେ ଠିକ୍ 3 ଗୋଟି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇଥିବ;

(ii) 30 ରୁ 50 ବର୍ଷ ବୟସର ଚାଳକ ବର୍ଷରେ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇଥିବ ଓ

(iii) ଯେ କୌଣସି ଚାଳକ ବର୍ଷରେ କୌଣସି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇ ନଥିବ ।

ସମାଧାନ : ପର୍ଯ୍ୟବେକ୍ଷଣରେ ସମୁଦାୟ ଗାଡି ଚାଳକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = 2000

(i) ବର୍ଷକୁ 3 ଟି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଉଥିବା 18 ରୁ 29 ବର୍ଷ ବର୍ଗର ଗାଡିଚାଳକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = 61

$\therefore$ P (18 ରୁ 29 ବର୍ଷ ବର୍ଗରେ ବର୍ଷକୁ 3 ଟି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇଥିବା) = $\frac{61}{2000}$

(ii) 30 ରୁ 50 ବର୍ଷ ବର୍ଗରେ ବର୍ଷକୁ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଉଥିବା ଚାଳକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା

= 125 + 60 + 22 + 18 = 225 ;

P (30 ରୁ 50 ବର୍ଷ ବର୍ଗରେ ବର୍ଷରେ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇବା) = $\frac{225}{2000}$ = 0.1125 ।

(iii) ବର୍ଷକୁ କୌଣସି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଇ ନଥିବା ଚାଳକଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା = 440 + 505 + 360 = 1305 ;

∴ P (ଜଣେ ଚାଳକ କୌଣସି ଦୁର୍ଘଟଣା ଘଟାଏ ନାହିଁ) = $\frac{1305}{2000}$ = 0.6525 ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8 (a)

1. ଗୋଟିଏ ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଟସ୍ କଲେ ଫଳାଫଳ ଦ୍ୱୟକୁ ସୂଚାଅ ।

2. ଗୋଟିଏ ଅପ୍ରବଣ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଗଡାଇଲେ ଫଳାଫଳ ଗୁଡିକ କଣ ହେବ ଲେଖ ।

3. ଗୋଟିଏ ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଥରେ ଟସ୍ କରାଗଲା । ଫଳ H କିମ୍ବା T ମିଳିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେତେ ?

4. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡାଇଲେ ଫଳ < 7 ହେବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେତେ ?

5. ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଟସ୍ କରାଗଲା । ଫଳ HH କିମ୍ବା TT କିମ୍ବା HT କିମ୍ବା TH ମିଳିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା କେତେ ?

6. ଗୋଟିଏ କ୍ରିକେଟ୍ ଖେଳରେ ଜଣେ ବ୍ୟାଟ୍‌ସ୍‌ମ୍ୟାନ୍ 30 ବଲ୍ ଖେଳି 6 ଟି ବଲ୍‌କୁ ସୀମା ପାର କରାଇ ଥିଲେ । ବ୍ୟାଟ୍‌ସ୍‌ମ୍ୟାନ୍ (i) ବଲ୍‌କୁ ସୀମା ପାର କରାଇବାର (ii) ସୀମା ପାର ନ କରାଇବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର।

7. କୌଣସି ଏକ ସହରର ଦୈନିକ ପାଣିପାଗର ସୂଚନା 305 ଦିନ ପାଇଁ 2008 ମସିହାରେ ସତ୍ୟ ହେଲା । ତେବେ କୌଣସି ଦିବସର ପାଣିପାଗ ସୂଚନା ଅସତ୍ୟ ହେବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

8. ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନରେ 1500 ପରିବାର ଯଦୃଚ୍ଛା (randomly) ବଛାଗଲେ । ପରିବାରରେ ଥିବା ଝିଅ ମାନଙ୍କ ସଂଖ୍ୟା ସମ୍ପର୍କିତ ତଥ୍ୟ ନିମ୍ନ ଟେବୁଲ୍‌ରେ ଦିଆଯାଇଛି ।

ପରିବାରରେ ଝିଅ ସଂଖ୍ୟା	0	1	2
ପରିବାର ସଂଖ୍ୟା	211	814	475

ତେବେ ଯେ କୌଣସି ଏକ ପରିବାରରେ

(i) ଦୁଇଟି ଝିଅ ଥିବାର (ii) ଗୋଟିଏ ଝିଅ ଥିବାର (iii) କୌଣସି ଝିଅ ନଥିବାର ; ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

9. ତିନିଗୋଟି ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ 500 ଥର ଟସ୍ କରାଯିବାରୁ ଲବ୍ଧ ଫଳ ନିମ୍ନ ପ୍ରକାରର ହେଲା ।

ଫଳାଫଳ	ତିନିଟି H	ଦୁଇଟି H	ଗୋଟିଏ H	କୌଣସିଟି ନୁହେଁ H
ବାରମ୍ବାରତା	60	180	195	65

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

(i) P (ତିନିଟି H), (ii) P (ଦୁଇଟି H), (iii) P (ଗୋଟିଏ H), (iv)P(କୌଣସିଟି ନୁହେଁ H)

ଉପରେ ନିର୍ଣ୍ଣିତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ମାନଙ୍କ ସମଷ୍ଟି ନିରୂପଣ କର ।

10. ଗୋଟିଏ ଗୋଟିକୁ ୪00 ଥର ଗଡ଼ାଗଲା । ଗୋଟି ଗଡ଼ାଇବାରେ ପଡୁଥିବା ଫଳର ବାରମ୍ବାରତାକୁ ନିମ୍ନ ସାରଣୀରେ ଦିଆଯାଇଛି । ତେବେ ପ୍ରତ୍ୟେକ ଫଳର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ସ୍ଥିର କର ।

ଫଳାଫଳ	1	2	3	4	5	6
ବାରମ୍ବାରତା	144	152	136	128	118	122

୪.3 ସେଟ୍ ତତ୍ତ୍ୱ ଉପରେ ଆଧାରିତ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ଧାରଣା :

ସେଟ୍ ମାଧ୍ୟମରେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତାର ସଂଜ୍ଞା ଓ ଧାରଣା **ଗଣିତଜ୍ଞ Kalmogorov** ପ୍ରଦାନ କରିଥିଲେ ।

ମନେକର ଏକ ଅପ୍ରବଣ ମୁଦ୍ରାକୁ ଟସ୍ କରାଗଲା । ଫଳ H ଓ T ମଧ୍ୟରୁ ଯେକୌଣସି ଗୋଟିଏ ପଡ଼ିବ । ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳ ମାନଙ୍କ ସେଟ୍ S ହେଲେ, S = {H,T} ହେବ । (1)

ଏଠାରେ ସେଟ୍ S କୁ **ସାମ୍ପଲ୍ ସ୍ପେସ୍ (Sample space)** କୁହାଯାଏ । ସେହିପରି ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇଥର ଟସ୍ କଲେ ପରୀକ୍ଷଣର ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ S = { HH, HT, TH, TT } ହେବ । (2)

ମନେରଖ ଯେ, ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇଥର ଟସ୍ କରିବା ଓ ଦୁଇଟି ମୁଦ୍ରାକୁ ଏକ ସଙ୍ଗେ ଥରେ ଟସ୍ କରିବା ଏ ଦୁଇ କ୍ଷେତ୍ରରେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ ସମାନ ।

ସେହିପରି ଏକ ନିରପେକ୍ଷ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଭୂମିରେ ଗଡ଼ାଇଲେ ଫଳାଫଳ 1, 2, 3, 4, 5, 6 ମଧ୍ୟରୁ ଯେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ ହେବ । ଏଠାରେ ସମସ୍ତ ଫଳାଫଳ ମାନଙ୍କ ସେଟ୍ ଅର୍ଥାତ୍ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }

ଘଟଣା (Event) : ଏକ ପରୀକ୍ଷଣରେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ S ହେଲେ ଏହାର ଯେକୌଣସି ଉପସେଟ୍ (Sub set) E ଏକ ଘଟଣା । ଅର୍ଥାତ୍ ଏକ ଘଟଣା $E \subset S$ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ, ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଥରେ ଟସ୍ କଲେ ଘଟଣା E : ଶୂନସେଟ୍ ϕ, {H}, {T}, {H,T} ରୁ ଯେ କୌଣସି ଗୋଟିଏ । $E = \phi$ କୁ ବାକ୍ୟରେ ଆମେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ମତେ ପ୍ରକାଶ କରି ପାରିବା ।

E : ମୁଦ୍ରାଟି ଥରେ ଟସ୍ ହେତୁ ଫଳ H ଓ T ରୁ କୌଣସିଟି ନୁହେଁ ।

ସେହିପରି E = S କୁ ବାକ୍ୟରେ ପ୍ରକାଶ କଲେ E : ମୁଦ୍ରାଟି ଥରେ ଟସ୍ ହେତୁ ଫଳ H କିମ୍ବା T

E = {H} ର ଅର୍ଥ ମୁଦ୍ରାଟି ଥରେ ଟସ୍ ହେତୁ ଫଳ H ଏବଂ E = {T} ର ଅର୍ଥ ହେଉଛି ମୁଦ୍ରାଟି ଥରେ ଟସ୍ ହେତୁ ଫଳ T ।

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ପରୀକ୍ଷଣରେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ S ହେଲେ, S ର ଯେ କୌଣସି ଉପସେଟ୍ E ଏକ ଘଟଣା ଓ E ଘଟଣାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା $P(E) = \dfrac{\text{E ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା}}{\text{S ର ଉପାଦାନ ସଂଖ୍ୟା}} = \dfrac{|E|}{|S|}$

ସୁତରାଂ ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରା ଟସ୍ ପରୀକ୍ଷଣରେ $|S| = 2 \quad (\because S = \{H, T\})$

$E = \{H\}$ ହେଲେ, $|E| = 1$ ଓ $P(E) = \dfrac{|E|}{|S|} = \dfrac{1}{2}$, $E = \{T\}$ ହେଲେ $|E| = 1$ ଓ $P(E) = \dfrac{1}{2}$,

$E = \phi$ ହେଲେ, $|E| = 0$ ଓ $P(\phi) = \dfrac{0}{2} = 0$, $E = S$ ହେଲେ $|S| = 2$ ଓ $P(S) = \dfrac{2}{2} = 1$,

ଉଦାହରଣ - 5 : ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇ ଥର ଟସ୍ କରାଗଲେ ଫଳ ଦୁଇଟି H ମିଳିବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇ ଥର ଟସ୍ କରାଗଲେ ଫଳ ଗୁଡ଼ିକ HH, HT, TH ଓ TT ।

ସୁତରାଂ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ $S = \{ HH, HT, TH, TT \}$ $\therefore |S| = 4$

ଦତ୍ତ ଘଟଣା $E = \{HH\}$, ତେଣୁ $|E| = 1$ ସୁତରାଂ $P(E) = P(\{HH\}) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{1}{4}$ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ଯଦି ଫଳ ଅତି କମ୍‌ରେ ଗୋଟିଏ H ଆଶା କରାଯାଏ ତେବେ $E = \{HH, HT, TH\}$ ଓ $|E| = 3$

ସୁତରାଂ ଏ କ୍ଷେତ୍ରରେ $P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{3}{4}$

ଉଦାହରଣ - 6 : ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇବାରେ ଫଳ ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ପାଇବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇଲେ ଫଳଗୁଡ଼ିକ 1, 2, 3, 4, 5 ଓ 6 ।

ସୁତରାଂ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ $\therefore |S| = 6$

ଦତ୍ତ ଘଟଣା $E = \{2,3,5\}$, $\therefore |E| = 3$

$\therefore P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8 (b)

1. ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ (i) ଥରେ, (ii) ଦୁଇଥର ଟସ୍ କଲେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ ଗୁଡିକୁ ଲେଖ ।
2. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇଲେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍ ଟି କଣ ହେବ ଲେଖ ।
3. ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଥରେ ଟସ୍ କରାଗଲା । ଘଟଣା $E = \{T\}$ ହେଲେ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା P(E) ନିରୂପଣ କର ।
4. ଗୋଟିଏ ମୁଦ୍ରାକୁ ଦୁଇଥର ଟସ୍ କଲେ ଘଟଣାଟି ଅତି ବେଶିରେ ଗୋଟିଏ T ପାଇବାର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର।
5. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇବାରେ ସାମ୍ପଲ ସ୍ପେସ୍‌ଟି କଣ ହେବ ଲେଖ ଓ E ଘଟଣାଟି ଫଳ 5 ରୁ କମ୍ ହେଲେ ଘଟଣାଟିକୁ ପ୍ରକାଶ କର ।
6. ଗୋଟିଏ ଲୁଡୁ ଗୋଟିକୁ ଥରେ ଗଡ଼ାଇବାରେ ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘଟଣା ମାନଙ୍କ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।
   (i) E : ଫଳ 5 ;
   (ii) E : ଫଳ ଏକ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ; [ଏଠାରେ ଫଳ 2 କିମ୍ବା 4 କିମ୍ବା 6]
   (iii) E : ଫଳ ଏକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ; [ଏଠାରେ ଫଳ 1 କିମ୍ବା 3 କିମ୍ବା 5]
   (iv) E : ଫଳ ଏକ ସଂଖ୍ୟା $k < 5$ [ଏଠାରେ ଫଳ ଗୁଡ଼ିକ 1, 2, 3, 4]
7. ଗୋଟିଏ ମୁଣି ଭିତରେ ଧଳା, ନାଲି, କଳା, ହଳଦିଆ ଓ ସବୁଜ ରଙ୍ଗର ଏକ ଆକାରର 5 ଗୋଟି ମାର୍ବଲ ଗୋଟି ଅଛି । ଗୋଟିଏ ଗୋଟି ମୁଣି ଭିତରୁ ହାତ ପୁରାଇ କଢାଗଲା । ନିମ୍ନଲିଖିତ ଘଟଣା ଗୁଡିକର ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।
   (i) E : ଗୋଟିଟି ଧଳା (ii) E : ଗୋଟିଟି ଧଳା କିମ୍ବା କଳା କିମ୍ବା ନାଲି
8. ଗୋଟିଏ ବ୍ୟାଗ୍‌ରେ 1, 2, 3,..... 13, 14, 15 ଲେଖାଥିବା 15 ଟି କାର୍ଡ଼ ଅଛି । ବ୍ୟାଗ୍‌ରୁ ଗୋଟିଏ କାର୍ଡ଼ ବାହାର କରିବାକୁ ହେବ । ନିମ୍ନ ଲିଖିତ ଘଟଣାମାନଙ୍କ ସମ୍ଭାବ୍ୟତା ନିରୂପଣ କର ।
   (i) E : ଫଳ ଗୋଟିଏ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖାଥିବା କାର୍ଡ଼ ।
   (ii) E : ଫଳ ଗୋଟିଏ ଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟା ଲେଖାଥିବା କାର୍ଡ଼ ।

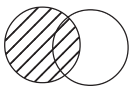
ଉତ୍ତରମାଳା

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (a)

1. (i) $\in$, (ii) $\notin$, (iii) =, (iv) =, (v) $\subset$, (vi) $\neq$; 2. (i) {3, 4, 5, 6}, (ii) {1, 2, 3, 4, 5}, (iii) {1, 2, 3, 5, 6}, (iv) {5}, (v) {3}, (vi) ϕ, (vii) {3, 4}, (viii) {1, 2}, (ix) {1, 2, 3}, (x) {6}, (xi) {4, 5}, (xii) {5, 6} ; 4.(i) {1, –1}, (ii) {2, 4}, (iii) ϕ, (iv) {0, 1, 2, 3}

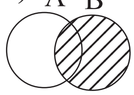
5. (i) {a, b, d, e, p}, (ii) {a, b, p, n, m, x, y}, (iii) {a, b, p, m, y} ;

7. (i)



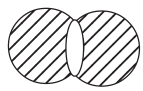
$(A \cap B) \cup (A - B) = A$

(ii)



$(A \cap B) \cup (B - A) = B$

(iii)



$(A \cup B) - (A \cap B = (A - B) \cup (B - A)$

9. $I_{20} - I_{16}$ = {17, 18, 19, 20}, $I_{16} - I_{20}$ = {} କିମ୍ବା ϕ ;

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1 (b)

1. (i) {1, 3, 5}, (ii) E, (iii) ϕ, (iv) E, (v) A, (vi) $(A \cap B)'$, (vii) $(A \cup B)'$, (viii) A Δ B, (ix) $(A \cup B) - (A \cap B)$, (x) ϕ, (xi) $A \cap B$ (xii) $A' \cap B'$;

2. ଠିକ୍ ଉକ୍ତି : (i) , (ii), (iv), (v), (vi) ; 3. (i) {± 1, ± 3, ± 5, ...}, (ii) E ଓ ϕ (iii) 11;

ଅନୁଶୀଳନୀ - 1(c)

1. (a). (i) 12, (ii) 9, (iii) 3, (iv) 6, (v) 13, (vi) 4, (vii) 7, (viii) 12 ;
   (b). (i) x = –2, y = 3, (ii) x = 2, y = 3, (iii) x = ±2, y = ±3, (iv) x = 2, y = 1;
   (c). (i) {(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)} (ii) {(2, 3)} ;

2. 15 ; 3. 90 ; 4 . 31 ; 5 . 30 ; 6 . 50 ; 7 . 35, 40 ; 8 . 5 ; 9 . 52 ; 10 . 11, 34 ; 11. 500 ; 12. 60,100;

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(a)

1. (i) T, (ii) T, (iii) F, (iv) F, (v) T, (vi)T, (vii) F, (viii) T, (ix) T, (x) F, (xi) T, (xii) F ;

2. (i) $-\frac{1}{2}$, (ii) $-\frac{1}{7}$, (iii) 0, (iv) 1 (କିମ୍ବା –1), (v) ଅଯୁଗ୍ମ, (vii) 2, (viii)3, (ix) ଯୋଗ, (x) 0, (xi) N, (xii) –1;

3. (i) d, (ii) a, (iii) c, (iv) a, (v) b, (vi) b, (vii) a, (viii) c, (ix) c ; 4. ନାହିଁ, କାରଣ 2 ଏକ ମୌଳିକ ସଂଖ୍ୟା; 8. ନାହିଁ, କାରଣ 7 + 5 = 12 ଓ ଏହା ଯୁଗ୍ମ; 9. 29, 50 ଓ 77; 10. ହଁ, କାରଣ ଏହା ଅସରନ୍ତି ପୌନଃପୁନିକ ଦଶମିକରାଶି; 11. $\frac{131}{1000}$; 12. $0.\bar{3}$ 13. $q_1 = 300$, $p_2 = -34$, $\frac{6}{18}$; 14. ବଡ ସଂଖ୍ୟା = $\frac{-15}{15}$ ଓ ସାନ ସଂଖ୍ୟା = $\frac{-15}{1}$; 15. $\frac{9}{40}, \frac{19}{80}, \frac{39}{160}$ ଓ $\frac{79}{320}$; 16. $-\frac{5}{12}, -\frac{11}{24}, -\frac{23}{48}$; 17. $3.\overline{857142}$; 19. (i) $\frac{1}{9}$ (ii) $\frac{1}{9}$ (iii) $\frac{89}{99}$ (iv) $\frac{37}{99}$, (v) $\frac{123}{999}$, (vi) $\frac{289}{900}$, (vii) $-\frac{49}{90}$, (viii) $\frac{69}{10}$, (ix) $-\frac{4}{33}$, (x) $\frac{641}{49500}$

20. (i) 1 (ii) 0 (iii) 1 (iv) 1 (v) $\frac{1}{3}$ (vi) 1 (vii) $\frac{1}{27}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 2(b)

1. (i) c, (ii) b, (iii) a, (iv) c, (v) a, (vi)d, (vii) d, (viii) b, (ix) c, (x) b, (xi) a, (xii) a, (xiii)d

2. (i), (ii), (iv), (vi), (ix) , (x), (xii) , (xiii), (xvi), (xvii) - ସତ୍ୟ;

3. (i), (ii), (iii), (iv), (v), (x), (xi) ...... ପରିମେୟ, ଅବଶିଷ୍ଟ ଅପରିମେୟ;

4. (i) $\frac{1}{2}$, (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (iii) $-\sqrt{2}$, (iv) ଆସନ୍ନ, (v) $-4+\sqrt{3}$ (vi) 1 (କିମ୍ବା –1), (vii) $p \neq 0$, (viii) R, (ix) π, (x) 0; 5. (i) → (vii), (ii) → (ix), (iii) → (iii), (iv) → (ii), (v) → (iv), (vi) → (viii), (vii) → (vi), (viii) → (i), (ix) → (v);

6. (i) $\sqrt{2}$ ଓ $-\sqrt{2}$, (ii) $2\sqrt{2}$ ଓ $-1+\sqrt{2}$, (iii) $\sqrt{2}-1$ ଓ $\sqrt{2}+1$, (iv) $\sqrt{2}-1$ ଓ $\sqrt{2}+1$, (v) $\sqrt{2}$ ଓ $\sqrt{3}$ (vi) $\sqrt{2}$ ଓ $-\sqrt{2}$, (vii) $\sqrt{2}$ ଓ $\sqrt{6}$; 7. (i) 0, (ii) 1 (କିମ୍ବା –1) (iii) ନାହିଁ, କାରଣ ଏହା ହେବା ଅର୍ଥ 0 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରିବା ଯାହା ଅସମ୍ଭବ, (iv) $\sqrt{2}+1$ ଓ $\sqrt{2}-1$, (v) $4+\sqrt{2}$ ଓ $3-\sqrt{2}$ (vi) ଉଭୟେ ଅସରନ୍ତି (କେବଳ ପରିମେୟର ଲବଟି ଯଦି 2 କିମ୍ବା 5 ଉତ୍ପାଦକ ବିଶିଷ୍ଟକୁ ଛାଡି - ଯେତେବେଳେ ରୂପଟି ସରନ୍ତି) ମାତ୍ର ପରିମେୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ପୌନଃପୁନିକ ମାତ୍ର ଅପରିମେୟ କ୍ଷେତ୍ରରେ ଅଣ ପୌନଃପୁନିକ ।

8. (i) $9\sqrt{2}$, (ii) $10\sqrt{2}$, (iii) 0, (iv) $18\sqrt{3}$; 9. (i) $\sqrt{10}$, (ii) 10, (iii) 7, (iv) 90

10. (i) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, (ii) $\frac{\sqrt{2}}{6}$, (iii) $2-\sqrt{3}$, (iv) $\frac{(\sqrt{5}+1)}{4}$, (v) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; 11. ଅପରିମେୟ, କାରଣ ଏହା ଅସରନ୍ତି ଓ ଅଣ ପୁନଃ ପୁନିକ ଦଶମିକ । 12. (i) 7, (ii) 7.2, (iii) 2.4, (iv) 4π; 13. (i) $\frac{2(\sqrt{3}-2)}{3}$, (ii) $2(\sqrt{2}-1)$, (iii) $\frac{2(3-\sqrt{2})}{7}$, (iv) $\sqrt{2}-1$, (v) $\frac{5(3+\sqrt{2})}{7}$, (vi) $\sqrt{6}+\sqrt{3}-\sqrt{2}-2$, (vii) $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}-\sqrt{2}+2}{3}$, (viii) $\frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, (ix) $\frac{5\sqrt{6}-2\sqrt{15}-3\sqrt{10}+12}{12}$; 14.(i) 8, (ii) 12; 15.(i) 2, –1, (ii) $\frac{21}{11}, \frac{8}{11}$, (iii) $\frac{-7}{5}, -\frac{3}{5}$; 18. $2+4\sqrt{6}$; 20.(i)a, (ii) 3, (iii) 81; 21. (i) a–b, (ii) 1 – a, (iii) 1 – a, (iv) x+y, (v) $x^{-2}+x^{-1}y^{-1}+y^{-2}$; 22.(i) $x^{-\frac{1}{6}}\ y^{-\frac{1}{9}} z^{-\frac{2}{9}}$, (ii) $xy^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{6}}$, 25. (i) 1, (ii) 1, (iii) $\frac{1}{2}$

28. (i) –4, 10 (ii) 10, –12, (iii) 2, –1, (iv) $\frac{1}{3}$, –3; 29. (i) $\frac{9}{4}-\frac{3\sqrt{5}}{4}$ (ii) $\frac{4}{7}-\frac{\sqrt{2}}{7}$ (iii) $2-\sqrt{3}$

30. (i) $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, (ii) $x < -1$ କିମ୍ବା $x > 1$ (iii) $-\frac{5}{3} \le x \le \frac{5}{3}$ (iv) $x \le -\frac{3}{2}$ କିମ୍ବା $x \ge \frac{3}{2}$ (v) $-2 \le x \le \frac{8}{3}$ (vi) $x \le -\frac{8}{7}$ କିମ୍ବା $x \ge \frac{2}{7}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (a)

1. $\frac{11}{13}y^9$, $7y^8$, $-8y^4$, $1.4y^3$, $\sqrt{2}\,y^2$, $\sqrt{3}\,y$; 2. $12x^2$, $-5x^2$; $-3x$, $\frac{x}{7}$; $\frac{1}{\sqrt{2}}x^3$, $\sqrt{3}\,x^3$; 15, $\frac{8}{11}$; $10x^4$; 3. (i) –5, $\frac{2}{3}$ (ii) $2x^2$, $-\frac{4}{5}x^2$ (iii) x^3-1, $2x^3+5x$ (iv) x^2-5x+2, $2x^2-3x-7$, (ଅନ୍ୟ ଉଦାହରଣ ମଧ୍ୟ ସମ୍ଭବ ।); 4. (i) y^3+2y-2, (ii) $2x^4+x^3-3x^2-4$, (iii) x^2-1, (iv) $4x^3+2x^2-x+4$, (v) z^3+z^2+6z-5, (vi) $9xyz$, (vii) $x^2+xy+3y^2$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(b)

1. (i) 4, (ii) –4, (iii) $\frac{11}{4}$, (iv) 31; 2. (a) (i) –6, (ii) 5, (iii) –21, (iv) 60, (v) –3, (b) (i) –1 ଓ $-\frac{1}{3}$, (ii) $\frac{d}{c}$, (iii) $\frac{1}{2}$ ଓ $-\frac{1}{2}$, (iv) 1 ଓ –2 ; 3. (i) x + 3, (ii) x – 2, (iii) 2x – 1, (iv) 2x – 3; 4. (i) (iv) ; 5. (i) ଓ (iii) ; 6. (i) –2, (ii) $-(2+\sqrt{2})$, (iii) $\sqrt{2}-1$, (iv) $-\frac{3}{2}$; 7. (i) 0, (ii) 9, (iii) 11, (iv) –1; 8. (i) (x – 4) (x – 3), (ii) (x – 4) (x + 1), (iii) (x – 2) (x + 1) (x – 1), (iv) $(y-1)(y^2-2)$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3(c)

1. (i) (x–2) (x–1), (ii) x^2-4x+3, (iii) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$, (iv) (2a – b) (2a – b) (2a – b) (v) $(25+5x^2+x^4)(25-5x^2+x^4)$ (vi) (1 – a + b) (vii) 6 (2x – 3y) (3y – 4z) (2z – x) (viii) 16380 (ix) 3 (a – b) (b – c) (c – a) (x) (x – 1)

2. (i) (2x+1) (x–1), (ii) (2x – 1) (x – 1), (iii) (5x + 4) (x – 1), (iv) (4x + 3) (x – 2) (v) (3x + 2) (x + 3) (vi) (7x – 6) (x + 1), (vii) (2x + 7) (x – 1) (viii) (4x – 1) (x – 1), (ix) (4x – 7) (b – c) (x + 1)

3. (i) $(5a^2+4b)(5a^2-4b)$, (ii) (3 + 8pq) (3 – 8pq), (iii) $(2x+3y)(4x^2-6xy+9y^2)$, (iv) $(2x-3y)(4x^2+6xy-9y^2)$, (v) (a + b + 3) (a + b – 3) (vi) (2a + 9) (2a + 1) (vii) 3y (2x + y), (viii) (8a + p) (7p – 4a), (ix) 3 (12a – 3b + 5) (8a – 7b + 5), (x) $(4a^2+2a+1)(4a^2-2a+1)$, (xi) $p(p-3q^2)(p^2+3q^2+9q^4)$, (xii) $-(a+1)(a^2+5a+7)$, (xiii) $(5-2x)(4x^2-8x+7)$, (xiv) $5p^2q(8p^2+q^3)(8p^2-q^3)$ (xv) $(a+3)(a^2+3a+3)$, (xvi) $(2x-1)(4x^2-16x+19)$, (xvii) (a + 2b) (a + 2b) (a+2b) (xviii) (a + 3) (a + 3) (a + 3), (xix) (2 – 3p) (2 – 3p) (2 – 3p) (xx) (b – c)(b – c) (b – c)

4. (i) $(a^2+a+1)(a^2-a+1)$, (ii) $(a^2b^2+ab+1)(a^2b^2-ab+1)$, (iii) $(4a^2+6ab+9b^2)(4a^2-6ab+9b^2)$, (iv) $(a^4-a^2+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$, (v) $(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$, (vi) $2(a^2+2ab+2b^2)(a^2-2ab+2b^2)$, (vii) $9(2a^2+2ab+b^2)(2a^2-2ab+b^2)$, (viii) $(2a^2+3a+4)(2a^2-3a+4)$, (ix) $(a^2+2ab+3b^2)(a^2-2ab+3b^2)$, (x) $(a^2+a-1)(a^2-a-1)$, (xi) $(5a^2+7ab+3b^2)(5a^2-7ab+3b^2)$, (xii) (3x + y + 2z) (3x + y – 2z), (xiii) (4 – 3y + x) (4 + 3y – x), (xiv) (ax – by + ay + bx) (ax – by – ay – bx) (xv) {x (a – b) + y (a + b)} {x (a – b) – y (a + b)};

5. (i) $(a+b+x)(a^2+b^2+x^2-ab-bx-ax)$, (ii) $(2a+b+c)(4a^2+b^2+c^2-2ab-bc-2ac)$, (iii) $(a+b-2)(a^2+b^2+4-ab+2b+2a)$, (iv) $(l-3m-n)(l^2+9m^2+n^2+3lm-3mn+ln)$, (v) $2a[(a-b)+(b-c)^2+(c-a)^2]$, (vi) $(a^2+a-1)(a^4-a^3+2a^2+a+1)$ (vii) $(x+6)(x^2-6x+12)$, (viii) $(m-1)(m+2)(m^4-m^3+3m^2+2m+4)$ (ix) $\left(a^2+\frac{1}{a^2}-2\right)\left(a^4+a^2+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}\right)$, (x) $(r^2+3r-2)(r^4-3r^3+11r^2+6r+4)$ (xi) $2(2x-3y^2-z)(4x^2+9y^4+z^2+6xy^2+2xz-3y^2z)$; (xii) $\left(a+b-\frac{1}{3}c\right)\left(a^2+b^2+\frac{1}{9}c^2-ab+\frac{ac}{3}+\frac{bc}{3}\right)$, (xiii) $(3a-2b^2+5c)(9a^2+4b^4+25c^2+6ab^2+10b^2c-15ac)$ (xiv) –3 (2x + 3) (3x – 2) (5x + 1); 7. 3 (x – y) (y – z) (z – x)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (d)

1. (i) xy, (ii) $2a^2b^2$, (iii) $3ab^2c$, (iv) xy, (v) $36x^3y^6z^6$; 2. (i) x+1, (ii) a–b, (iii) 2a –b, (iv) $(x-1)^2$, (v) $x^2 - xy + y^2$, (vi) 2(a –2b), (vii) x + 4, (viii) 2x + 3, (ix) a + b + c, (x) a + b + c, (xi) a – b, (xii) x – b; 3. (i) $12a^3b$, (ii) $12a^3b^4$, (iii) $340a^3b^3c^5$, (iv) $12a^2b^2$ (v) $150x^3y^3z^3$; 4. (i) ab(a+b)(a–b), (ii) 12x(x+y)(x –y), (iii) $xy(x+y)(x^2-xy+y^2)$, (iv) $24a^2b(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)$, (v) $(x+y)(x-y)^3$, (vi) $x(x+y)(x-y)^2$, (vii) $24(a+b)^2(a-b)^2$ (viii) $(2x-1)^2(x+3)$, (ix) a(a+2)(3a+2), (x) $x(2x-3)^2(3x+2)$, (xi) 2x(x+2) (3x+1)(3x –1), (xii) (x+y) (y+z) (z+x), (xiii) (a–b) (b –c) (c–a), (xiv) (a + b + c) (a –b – c) (c – a– b), (xv) $(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$, (xvi) $(a+b)^3(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2)$ (xvii) 3(x–y) (y –z) (z –x)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 3 (e)

1. (i) ✗ (ii) ✗ (iii) ✔ (iv) ✗ (v) ✔ (vi) ✗ ; 2. (i) $\frac{2x}{x^2-y^2}$ (ii) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ (iii) 0 (iv) $\frac{4xy}{y^2-x^2}$

(v) $\frac{-2y}{(x+y)(x-y)^2}$ (vi) $\frac{b^2}{a+b}$ (vii) 0 (viii) $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ (ix) $\frac{6(x^2-2)}{(x^2-1)(x^2-4)}$ (x) $\frac{x^2}{6(x+3)(x-3)}$

3. (i) $\frac{x^2y^2z^2}{abc}$, (ii) $\frac{x}{y(x+y)}$, (iii) 1, (iv) $\frac{(x-5)(x^2-2x+4)}{(x-7)(x^2+2x+4)}$, (v) $\frac{y^6-x^6}{y^6}$, (vi) $\frac{x^2(z+x)}{y}$

(vii) $\frac{2ab}{a^2+b^2}$ (viii) 1 (ix) xy (x) $\frac{a-b}{a}$ (xi) $\frac{(a-3)(a-7)}{(a-2)(a-6)}$; 4.(i) $\frac{2x+1}{3x+2}$, (ii) a^2, (iii) y,(iv) $\frac{x^3}{x^3-x-1}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(a)

1. (i) ସମସ୍ତ ମାନ (ii) 3, (iii) 2, (iv) –1, (v) 8, (vi) 2; 2. (i) ଓ (iv) ଅଭେଦ ; (ii) , (iii) ଓ (v) - ସଙ୍ଗତ; (vi) ଅସଙ୍ଗତ ; ii, iii ଅନୁରୂପ [(ii) 3, (iii) 3, (v) 3b – 4]; 3. (i) 3, (ii) –30, (iii) 3b – 2a, (iv) 3, (v) 11, (vi) 4; 4. (i) –6 (ii) 6, (iii) 12, (iv) 2, (v) $\frac{15}{17}$, (vi) 10, 5. (i) –7, (ii) 2, (iii) –1, (iv) $-\frac{6}{13}$, (v) $-\frac{19}{25}$, (vi) 1

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(b)

1. (iii) ବ୍ୟତୀତ ଅନ୍ୟ ସମସ୍ତ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ, 2. (i) 0 ଓ 3 (ii) 2 ଓ –2, (iii) 1 ଓ 2, (iv) $\sqrt{2}$ ଓ $-2\sqrt{2}$, (v) –1 ଓ 2; 3. (i) 14 ଓ –14 (ii) 0 ଓ $\frac{2}{5}$, (iii) 2 ଓ 1, (iv) 4 ଓ –7, (v) $\sqrt{3}$, $-\frac{2}{\sqrt{3}}$, (vi) 3 ଓ $-\frac{1}{2}$, (vii) a ଓ –2a, (viii) – (a + b) ଓ b – a; 4. (i) 3 ଓ $\frac{5}{2}$ (ii) 4 ଓ $-\frac{2}{3}$, (iii) –9 ଓ –2, (iv) 1 ଓ –2; 5. (i) 12, 4, (ii) –2, –3

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(c)

1. 10, 11; 2. 0, 1 3. 42, 9 4. 3, 4, 5 5. 15, 8 6. 4, $\frac{1}{4}$
7. 22, 14 8. 18 9. 5, 6, 7 10. 11, 13 11. 6, 8 12. 12 କି.ମି. 13. 9, 5
14. 19, 7 15. 48, 32 16. 5 କି.ମି 17. 36

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(d)

1. (ii), (iv) ଓ (vi) : ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣ; 2. (i) $\frac{3}{2}$, (ii) –4, (iii) 3, (iv) $\frac{1}{3}$, (v) 2, (vi)–4; 3. (i) 2, (ii) 2, (iii) $\frac{3}{2}$, (iv) $\frac{3}{2}$; 4. (i) 15, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) $\frac{3}{2}$, (iv) – 4, (v) $\frac{1}{2}$, (vi) 1, (vii) 2, (viii) 1, (ix) 3, (x) 1 ଓ 2

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(a)

3. (i) ଏକ, (ii) ଦୁଇ, (iii) Rene Descartes, (iv) 4, (v) $\overrightarrow{ox}$, (vi) $\overrightarrow{OY'}$, (vii) ବୀଜଗଣିତ (viii) 5, 4

5. (i) Q_4 (ii) Q_2 (iii) Q_3 (iv) ଅଧଃ, (v) ବାମ, (vi) Q_3

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(b)

1. (i) ax + by + c = 0 (a ≠ 0) (b ≠ 0), (ii) ସରଳରେଖା, (iii) y = 0, (iv) x = 0, (v) x = 3, (vi) y= –2, (vii) y = mx, (viii) ନୁହେଁ, (ix) ହଁ, (x) (0, 0); 2. (i) $-\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}$, (ii) $\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$, (iii) $\frac{3}{4}$, 0

3. (i) ଓ (iv); 4. (i) 1, (ii) $\frac{5}{6}$, (iii) 1, (iv) –5, (v) 1, (vi) –1

ଅନୁଶୀଳନୀ - 5(c)

5. (3, 0), (0, 2); 7. (3, 4), (–3, 4), (–3, –4), (3, –4); 9. (1, –1) (–2, –2), 10. (–3, –1)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 6

1. (i) 55:72 (ii) $\frac{8}{125}$ (iii)q:s (iv) 11:13 (v) 6:4:3 (vi) 6:15:20 (vii)k=1

2. (i) (ii) (vii) ଭୁଲ୍ ଉକ୍ତି, ଅବଶିଷ୍ଟ ଠିକ୍ ଉକ୍ତି । 3. (i) 21, (ii) 0.0001, (iii) a^3b^3, (iv)1 (v)12 (vi) $a^2–ab+b^2$ । 4. (i) 25 (ii) b^3 (iii) $\frac{x+y}{x-y}$ (iv) ab

5. (i) ±15 (ii) ± 6abc (iii)$(a^2–b^2)^2$ 6. (i) a = –1 (ii) x = 3

7. (i) 8; (ii)2; (iii)1; (iv)2; 8.(i) 8:23; (ii) 38:31; (iii) 245, 196, 140 (iv) –11 : 1 (v) 5:13

15. ସ୍ମିତିର 14 ବର୍ଷ ଓ ସୁନିଲ୍‌ର 12 ବର୍ଷ । 16. ଅନିଲ୍‌ର 16 ବର୍ଷ ଓ ସୁନିଲ୍‌ର 24 ବର୍ଷ । 17. 32 ଜଣ ।

18. 5 ଲିଟର 19. B ର ଆୟ 6000 ଟଙ୍କା 21. 35, 40, 45, 22. 7:11;

23. (i) $-\frac{3}{2}$ (ii) 8 (iii) $\frac{2ab}{b^2+1}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (a)

1.

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	10	11	12	13	14	15	16	17	18
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା	5	13	30	59	100	136	163	179	189

2.

ଲବ୍ଧାଙ୍କ	1	2	3	4	5	6	7	8
ବାରମ୍ବାରତା	5	8	12	18	13	10	7	4

3. (b) (i) 158 ସେ.ମି., (ii) 3 ଜଣ (iii) 170, (iv) 24, (v) 9; 4. (i) 27 (ii) A – 2, B – 11, C – 14, D – 3, E – 0; 5. (c) (i) 42, (ii) 93 (iii) 73 (iv) 30

ଅନୁଶୀଳନୀ - 7 (b)

1. (a) 32, 8 (b) 24 (d) 5 (e) (15 –19) (f) (5 –9)

2. (a) 120,127 (b) 107 (d) 10 (e) (150 – 160) (f) (130 –140) ଏବଂ (180 – 190) (g) (220 – 230) 3. ସଂଭାଗ ବିସ୍ତାର, 10 ଏବଂ ସଂଭାଗମାନ (20 – 30), (30 – 40), ... (80 – 90)

4.

ସଂଭାଗ	0 - 9	10-19	20-29	30-39	40-49
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା	8	21	42	57	63

39ର ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା 57

5. (a)

ସଂଭାଗ	0 -9	10-19	20-29	30-39	40-49	50- 59	60-69
ରାଶିକୃତ ବାରମ୍ବାରତା	5	9	14	24	32	37	40

(b) 24 (c) (30-39) (d) (60-69)

6. (i) 27 (ii) 65 (iii) 89 (iv) 19

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8 (a)

1. {H, T}, 2. {1, 2, 3, 4, 5, 6}, 3. $\frac{1}{2}$; 4. 1; 5. $\frac{1}{4}$, 6. (i) $\frac{1}{5}$, (ii) $\frac{4}{5}$; 7. $\frac{61}{366}$, 8.(i) $\frac{475}{1000}$, (ii) $\frac{814}{1000}$, (iii) $\frac{211}{1000}$; 9.(i) $\frac{60}{500}$, (ii) $\frac{180}{500}$, (iii) $\frac{195}{500}$, (iv) $\frac{65}{500}$

ଅନୁଶୀଳନୀ - 8 (b)

1. { H,T}, {HH, HT, TH, TT}, 2. {1, 2, 3, 4, 5, 6}, 3. $\frac{1}{2}$, 4. $\frac{1}{2}$, 5. {1,2,3,4,5,6},{1,2,3,4}

6.(i) $\frac{1}{6}$, (ii) $\frac{1}{2}$, (iii) $\frac{1}{2}$, (iv) $\frac{2}{3}$, 7.(i) $\frac{1}{5}$, (ii) $\frac{3}{5}$, 8.(i) $\frac{2}{5}$, (ii) $\frac{7}{15}$